2019학년도 수시모집 모의 논술고사 문제

문제 1 [총30점]

[문제 1-1] [10점]
전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$의 세 부분집합 X, Y, Z가 다음 조건을 만족시킬 때 집합 X중에서 원소들의 합이 최소가 되는 것을 구하시오.
(단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.)

(가) $X\cup\{2,3,4,6\}=Y$, $Y-\{2,4\}=Z$, $Z\cap\{1,2,3,5,7\}=\{1,3,5,7\}$
(나) $n(X)=4$, $n(Z)=5$

[문제 1-2] [10점]
세 집합 $N=\{n\mid n\text{은 자연수}\}$, $X=\{x\mid x\text{는 정수}\}$, $Y=\{y\mid 0\le y<1\text{인 실수}\}$에 대하여 두 함수 $f:N\to X$, $g:N\to Y$를 $\log_2 n=f(n)+g(n)$으로 정의하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)을 모두 구하시오.

(가) $1\le m\le 4$, $1\le n\le 4$
(나) $f(m)=f(n)+1$
(다) $g(m^2)=g(n)$

[문제 1-3] [10점] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 자연수 n에 대하여 열린 구간 $(0,1)$에서 함수 $g(x)$를 $g(x)=[n\sqrt{x}\,]$라 하자. (단, 실수 x에 대하여 $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)
(나) 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족시키는 가장 낮은 차수의 다항함수이다. (1) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다. (2) $f(x)g(x)$는 열린 구간 $(0,1)$에서 연속이다.

제시문(나)의 다항함수 $f(x)$을 구하고 방정식 $f(x)=0$의 모든 해의 합을 S_n라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값을 구하시오.

문제 2 [총30점]

[문제 2-1] [10점] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

> 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 점 A_n과 x축 위의 점 B_n은 다음과 같이 정의한다.
>
> (가) 점 B_1은 원점이고 $\overline{B_1B_n}=\frac{1}{2}n(n-1)$이다. (단, $n\geq 2$이다.)
>
> (나) 점 B_n을 지나면서 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 만나는 점이 A_n이다.

삼각형 $A_nB_nB_{n+1}$의 넓이를 S_n, 선분 B_nB_{n+1}의 길이를 l_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{{l_n}^2}{S_n}$의 값을 구하시오. (단, $n\geq 2$이다.)

[문제 2-2] [10점]

정수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=x^4+ax^3-bx+c$가 다음 세 조건을 만족시키게 되는 상수 a, b, c, p, q, r을 구하시오.

> (가) p, q, r는 $-2<p<-1<q<0<r$을 만족하는 실수이다.
>
> (나) 함수 $f(x)$는 x의 값이 p, q, r에서 극값을 갖는다.
>
> (다) $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

[문제 2-3] [10점]

실수 x에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-a}^{a}|u-x|\,du$$

라 정의하자. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $-1\leq X\leq 1$이고 확률변수 X의 확률밀도함수가 $g(x)$일 때, a^3+3a의 값을 구하시오. (단, $a>0$이다.)

문제 3 [총40점]

(가) **평균값 정리**

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

(나) **적분과 미분의 관계**

닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (\text{단, } a \le x \le b)$$

로 정의하면 함수 $g(x)$는 미분가능하고 $g'(x)=f(x)$이다.

(다) 모든 실수 x에서 미분가능한 함수 f가 다음을 만족시킨다.

(i) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.

(ii) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x \{f(t)+f(-t)\}dt=0$이다.

[문제 3-1] [10점]

제시문 (다)의 함수 f에 대하여 $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=f'(\gamma)$인 γ가 적어도 하나 존재함을 제시문 (가), (나)를 이용하여 보이시오. (단, $\alpha \neq 0$)

[문제 3-2] [10점]

제시문(다)의 함수 f가 $f(p)=1\,(p>0)$을 만족한다고 하자. 원점 O와 점 $A(0,1)$에 대하여 선분 OA를 n등분한 후 양 끝점을 포함한 각 분점을 차례로

$$y_0(=0),\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n-1},\ y_n(=1)$$

이라 하고, 직선 $y=y_k$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 $B_k(x_k, y_k)\,(k=0,1,2,\ \cdots, n)$라 하자. 함수 $f(x)$에 대하여 각 구간 $[x_{k-1}, x_k]$에서 평균값 정리를 만족하는 실수를 c_k $(k=1,2,\ \cdots, n)$라 할 때,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{1+m^2}\sum_{n=1}^{m}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(c_k)}\right\}=\frac{1}{1+p^2}$$

을 만족하는 p의 값을 구하시오.

[문제 3-3] [20점]

[문제3-2]에서 원점 O 와 점 $A(0,1)$에 대하여 선분 OA를 $n=2^m$ 등분하였을 때, $S(m)$과 $T(m)$은 다음과 같이 정의한다. (단, m은 자연수이다.)

(가) $S(m)=\sum_{k=1}^{2^m} f'(c_k)\triangle x_k$ $\quad(\triangle x_k=x_k-x_{k-1},\ k=1,2,3,\ \cdots,\ 2^m-1,\ 2^m)$

(나) x축 위의 반열린 구간 $[p,\infty)$에서의 점 a_i를

$$a_0=p,\quad a_{i+1}=a_i+2^i\quad (i=0,1,2,3,\ldots)$$

라 할 때, 구간 $[a_i\,,\ a_{i+1}]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 d_i에 대하여 $T(m)$을

$$T(m)=\sum_{i=0}^{2^m-1} 2^i f'(d_i)$$

라 하자.

$\lim_{m\to\infty}\{S(m)T(m)\}=2018$일 때, $\lim_{x\to\infty} f(x)$를 구하시오.