2018학년도 한국산업기술대학교 수시모집 논술고사
(오후 문제1,문제2의 답안)

한국산업기술대학교
KOREA POLYTECHNIC UNIVERSITY

[문제1]

1 [10점] 0이 아닌 실수 a, b에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 다항함수 $f(x)$를 구하시오.

(가) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3-f(x)}{x^2}=3b$

(나) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=6-3a$

2 [10점] 1번에서 구한 함수 $f(x)$가 극값을 가지지 않을 실수 a, b 사이의 관계식을 구하시오.

3 [15점] 2번에서 구한 관계식을 만족하는 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{b+2}{a+2}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

4 [15점] 2번에서 구한 관계식을 만족하는 실수 a, b와 자연수 n에 대하여, $\dfrac{b+n}{a+n}$의 최댓값과 최솟값의 합을 A_n이라 할 때, 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$을 구하시오.

[답안]

1 0이 아닌 실수 a, b에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 다항함수 $f(x)$를 구하시오.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3-f(x)}{x^2}=3b$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=6-3a$

(예시 답안)

다항함수 $ax^3-f(x)$가 삼차 이상인 다항함수이면 조건 (가)의 극한은 발산한다.
$ax^3-f(x)$가 일차함수 또는 상수함수이면 조건 (가)의 극한은 0으로 수렴한다.
그러나 $b\neq 0$이므로 이 경우 조건 (가)를 만족하지 않는다.
따라서 $ax^3-f(x)=mx^2+nx+d$ 또는 $f(x)=ax^3+mx^2+nx+d$인 삼차함수가 된다.
(여기서 m, n, d는 임의 상수)

이 경우, 조건 (가)에 의해

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-mx^2-nx-d}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(-m-\frac{n}{x}-\frac{d}{x^2}\right)=-m=3b$$

이므로 $f(x)=ax^3-3bx^2+nx+d$이다.

$d\neq 0$이면 조건 (나)의 극한은

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3-3bx^2+nx+d}{x}=\lim_{x\to 0}\left(ax^2-3bx+n+\frac{d}{x}\right)$$

이 되어 발산하므로 $d=0$이어야 한다. 따라서 $f(x)=ax^3-3bx^2+nx$이다.
이제 조건 (나)에 의해

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3-3bx^2+nx}{x}=\lim_{x\to 0}(ax^2-3bx+n)=n=6-3a$$

이므로 $n=6-3a$이다.
따라서 $f(x)=ax^3-3bx^2+(6-3a)x$이다.

2 1번에서 구한 함수 $f(x)$가 극값을 가지지 않을 실수 a, b 사이의 관계식을 구하시오.

(예시 답안)

먼저 $f(x) = ax^3 - 3bx^2 + (6-3a)x$이고 $f'(x) = 3ax^2 - 6bx + 6 - 3a$이다.

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않을 때 이 삼차곡선은 항상 증가하거나 항상 감소한다. 함수의 증가 감소와 도함수의 부호의 관계로부터 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이거나, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$이어야 한다.

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 또는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$임은 $f'(x) = 3ax^2 - 6bx + 6 - 3a = 0$가 중근 또는 허근을 갖는다는 점과 서로 동치이므로, $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $3ax^2 - 6bx + 6 - 3a = 0$의 판별식은 $D \leq 0$이어야 한다.

$$D = (-6b)^2 - 4(3a)(6-3a) \leq 0$$

즉, $b^2 + a^2 - 2a \leq 0$이어야 한다.

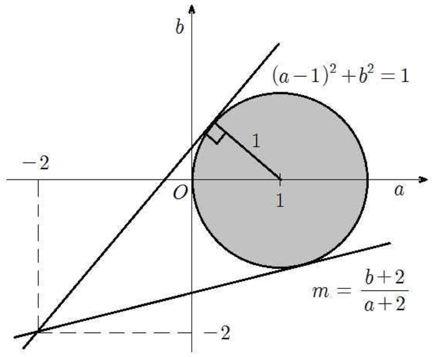
따라서 함수 $f(x)$가 극값을 가지지 않을 실수 a, b 사이의 관계식은 $b^2 + a^2 - 2a \leq 0$이다. (단 전제조건인 a, b는 0이 아닌 실수라는 것은 답안 작성에서 생략가능하다)

3 2번에서 구한 관계식을 만족하는 실수 a, b에 대하여 $\frac{b+2}{a+2}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

(예시 답안)

2번에서 구한 a, b에 대한 관계식 $b^2+a^2-2a \le 0$는 $(a-1)^2+b^2 \le 1$와 같으므로, 이 관계식은 ab-좌표계에서 중심이 $(1,0)$이고 반지름이 1인 원의 경계와 내부로 이루어진 영역이다.

$m=\frac{b+2}{a+2}$라고 하면 $b=m(a+2)-2$로 ab-좌표계에서 점 $(-2,-2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이다. 아래 그림과 같이 직선 $m=\frac{b+2}{a+2}$이 원 $(a-1)^2+b^2=1$과 접하는 경우에 영역과 만나는 이 직선의 기울기 m이 최대 또는 최소가 된다.



직선이 원과 접할 때, 원의 중심에서 이 직선까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같아진다.

점 $(1,0)$과 직선 $ma-b+2m-2=0$ 사이의 거리는 (점과 직선 사이의 거리 공식)

$$\frac{|m+2m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \Leftrightarrow (3m-2)^2=m^2+1 \Leftrightarrow 8m^2-12m+3=0$$

이다. (※ 직선 $b=m(a+2)-2$을 원 $(a-1)^2+b^2=1$의 식에 대입하고 정리하면

$$(m^2+1)a^2+2(2m^2-2m-1)a+4m^2-8m+4=0$$

이고 접하는 경우 한 점에서 만나기 때문에 위의 이차방정식은 중근을 가져야 한다. 즉,판별식 $=0$. $D/4=(2m^2-2m-1)^2-(m^2+1)(4m^2-8m+4)=0 \Rightarrow$

$8m^2-12m+3=0$이다.)

m에 대한 이차방정식 $8m^2-12m+3=0$의 두 실근의 합이 구하려는 최댓값과 최솟값의 합이 된다. 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터 구하려는 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$이다.

4 2번에서 구한 관계식을 만족하는 실수 a, b와 자연수 n에 대하여, $\frac{b+n}{a+n}$의 최댓값과 최솟값의 합을 A_n이라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} A_n$을 구하시오.

(예시 답안)

$m=\frac{b+n}{a+n}$이라 하면 $b=m(a+n)-n$으로 ab좌표계에서 점 $(-n,-n)$을 지나고 기울기가 m인 직선이다. 이 직선이 원 $(a-1)^2+b^2=1$에 접할 때 기울기 m이 최대 또는 최소가 된다. 직선이 원과 접할 때, 원의 중심에서 이 직선까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같아진다. 점 $(1,0)$과 직선 $ma-b+nm-n=0$사이의 거리는 (점과 직선 사이의 거리 공식)

$$d=\frac{|m+nm-n|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \Leftrightarrow (m+nm-n)^2=m^2+1 \Leftrightarrow (n^2-2n)m^2-2(n^2+n)m+n^2-1=0$$

이다. m에 대한 이차방정식 $(n^2-2n)m^2-2(n^2+n)m+n^2-1=0$의 두 실근의 합이 $\frac{b+n}{a+n}$의 최댓값과 최솟값의 합이 된다. 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터 $\frac{b+n}{a+n}$의 최댓값과 최솟값의 합은 $A_n=\frac{2(n^2+n)}{n^2-2n}$이다. 이 때, 극한은

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n^2+n)}{n^2-2n}=2 \text{이다.}$$

[문제2]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x), g(x), h(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=|x|^2+\frac{1}{2}|x|-\frac{1}{2}, \qquad g(x)=|f(x)|, \qquad h(x)=\int_0^x\left(t^2+\frac{1}{2}+g(t)\right)dt$$

1 **[10점]** $x=0$에서 함수 $f(x)$에 대한 미분 가능성을 조사하시오.

2 **[10점]** (1) 함수 $g(x)$가 $g(-x)=g(x)$를 만족함을 보이시오.
(2) 함수 $h(x)$가 $h(-x)=-h(x)$를 만족함을 보이시오.

3 **[15점]** 부등식 $\left(y-f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(y-g(x)+\frac{1}{2}\right)<0$을 만족하는 영역 A를 좌표평면에 나타내고 A의 넓이를 구하시오.

4 **[15점]** 실수 k에 대하여, 함수 $I(k)$를 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=5x+k$의 교점의 개수라 하고, 함수 $J(k)$를 곡선 $y=f(x)+g(x)$와 직선 $y=5x+k$의 교점의 개수라 할 때, 정적분 $\int_{-2}^{2} I(k)J(k)\,dk$를 구하시오.

[답안]

[문제2] 실수 집합 전체에서 정의된 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 아래 물음에 답하시오.

$$f(x)=|x|^2+\frac{1}{2}|x|-\frac{1}{2}, \qquad g(x)=|f(x)|, \qquad h(x)=\int_0^x\left(t^2+\frac{1}{2}+g(t)\right)dt$$

1 $x=0$에서 함수 $f(x)$에 대한 미분 가능성을 조사하시오.

(예시 답안)

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{h}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h^2-\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{h}=-\frac{1}{2}.$$

그러므로 $x=0$에서의 미분계수 $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$는 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분불가능하다.

2 (1) 함수 $g(x)$가 $g(-x)=g(x)$를 만족함을 보이시오.

(2) 함수 $h(x)$가 $h(-x)=-h(x)$를 만족함을 보이시오.

(예시 답안)

(1) $g(-x)=|f(-x)|=|f(x)|=g(x)$이다.

(2) $h(-x)=\int_0^{-x}\left(t^2+\frac{1}{2}+g(t)\right)dt=-\int_{-x}^{0}\left(t^2+\frac{1}{2}+g(t)\right)dt$

피적분 함수 $t^2+\frac{1}{2}+g(t)$가 y축에 대해 대칭이므로 구간 $[-x, 0]$에서의 적분 값은 구간 $[0,\ x]$에서의 적분 값과 같다. 그러므로

$$\int_{-x}^{0}\left(t^2+\frac{1}{2}+g(t)\right)dt=\int_0^x\left(t^2+\frac{1}{2}+g(t)\right)dt$$ 이고

$$h(-x)=-\int_0^x\left(t^2+\frac{1}{2}+g(t)\right)dt=-h(x)$$가 성립한다.

3 부등식 $\left(y-f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(y-g(x)+\frac{1}{2}\right)<0$을 만족하는 영역 A를 좌표평면에 나타내고 A의 넓이를 구하시오.

(예시 답안)

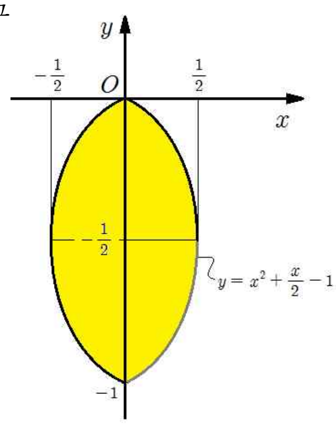
부등식 $\left(y-f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(y-g(x)+\frac{1}{2}\right)<0$은 다음 두 경우로 나누어진다.

(i) $y-f(x)+\frac{1}{2}>0$ 이고 $y-g(x)+\frac{1}{2}<0$

(ii) $y-f(x)+\frac{1}{2}<0$ 이고 $y-g(x)+\frac{1}{2}>0$

$y=f(x)-\frac{1}{2}$과 $y=g(x)-\frac{1}{2}$의 그래프는 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프를 각각 y축의 음의 방향으로 $\frac{1}{2}$평행 이동한 것과 같다.

경우 (i)을 만족하는 영역은 오른쪽 그림(경계 제외)과 같고
경우 (ii)만족하는 영역은 공집합이므로 두 경우 (i), (ii)에 의해 구하는 영역 A는 오른쪽 그림(경계 제외)과 같다.



$$\text{영역 A의 넓이}=4\int_0^{\frac{1}{2}}-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\,dx$$

$$=4\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{7}{12}$$

구하는 영역 A의 넓이는 $\frac{7}{12}$이다.

4 실수 k에 대하여, 함수 $I(k)$를 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=5x+k$의 교점의 개수라 하고, 함수 $J(k)$를 곡선 $y=f(x)+g(x)$와 직선 $y=5x+k$의 교점의 개수라 할 때, 정적분 $\int_{-2}^{2} I(k)J(k)\,dk$를 구하시오.

(예시 답안)

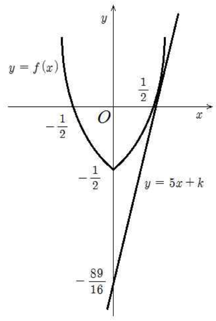
(i) 곡선$y=f(x)$와 직선 $y=5x+k$가 접하는 경우의 접점은

$f'(x)=2x+\dfrac{1}{2}=5$로부터 $x=\dfrac{9}{4}$이고 $y=f\left(\dfrac{9}{4}\right)=\dfrac{91}{16}$이다.

그러므로 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{91}{16}\right)$이고 이를 $y=5x+k$에 대입하면 $k=-\dfrac{89}{16}$이다.

오른쪽 그림에 의해 함수 $I(k)$는

$$I(k)=\begin{cases} 0\,, & k<-\dfrac{89}{16} \\ 1\,, & k=-\dfrac{89}{16} \\ 2\,, & k>-\dfrac{89}{16} \end{cases}$$ 이다.

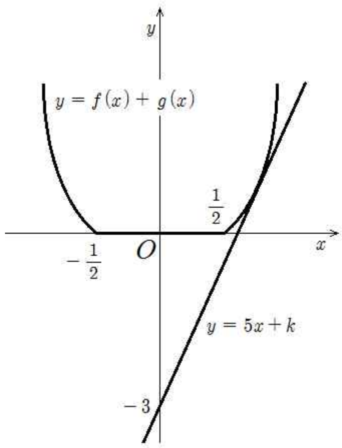


(ii) 곡선$y=f(x)+g(x)$의 직선 $y=5x+k$가 접하는 경우 $(f(x)+g(x))'=(2x^2+x-1)'=5$로부터 $x=1$이고 $f(1)+g(1)=2$이므로 접점의 좌표는 $(1,2)$이다. $(1,2)$를 $y=5x+k$에 대입하면 $k=-3$이다.

그러므로 오른쪽 그림에 의해 함수 $I(k)$는

$$J(k)=\begin{cases} 0\,, & k<-3 \\ 1\,, & k=-3 \\ 2\,, & k>-3 \end{cases}$$

이다.



(i)과 (ii)에 의해 $\int_{-2}^{2} I(k)J(k)\,dk=\int_{-2}^{2} 4\,dk=16$ 이다.