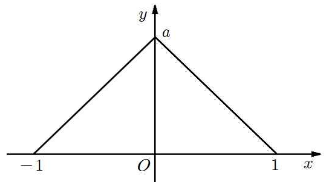
# 2018학년도 한국산업기술대학교 수시모집 논술고사
# (오전 문제1,문제2의 답안)

## [문제1]

**1 [10]** 구간 $[-1,1]$에서 정의된 연속확률변수 $X$의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.




(1) 상수 $a$의 값을 구하시오.

(2) 어떤 시행에서 사건 $A$가 일어날 확률 $p$가 $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right)$일 때, $p$의 값을 구하시오.

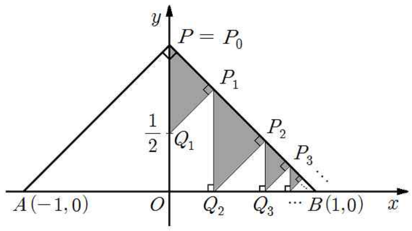
(3) 이 시행을 $10$번 반복한 독립시행에서 사건 $A$가 $1$번 이상 일어날 확률을 구하시오.

**2 [10]** 세 점 $P(0,1)$, $A(-1,0)$, $B(1,0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $APB$에서 점 $A$를 지나는 직선 $y=\frac{1}{n}(x+1)$ $(n \geqq 2$, 자연수$)$이 선분 $PB$와 만나는 점을 $C_n$이라 하고, 점 $C_n$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 $D_n$이라고 하자.

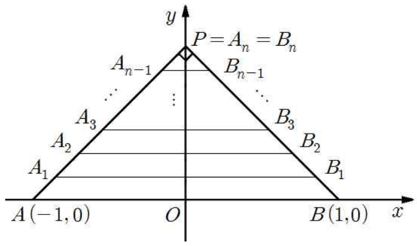
(1) 삼각형 $AC_nD_n$의 외접원의 중심 $(x_n, y_n)$을 구하시오.

(2) 극한값 $\lim_{n\to\infty} x_n$과 $\lim_{n\to\infty} y_n$을 구하시오..

**3 [15]** 아래 그림과 같이 각 $\angle P$가 $90^\circ$인 직각삼각형 $APB$ 내부의 점 $Q_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$에서 선분 $PB$에 내린 수선의 발을 $P_1$이라 하고, 점 $P_1$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 $Q_2$, 점 $Q_2$에서 선분 $PB$에 내린 수선의 발을 $P_2$라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 삼각형 $P_{n-1}Q_nP_n$의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합을 구하시오.

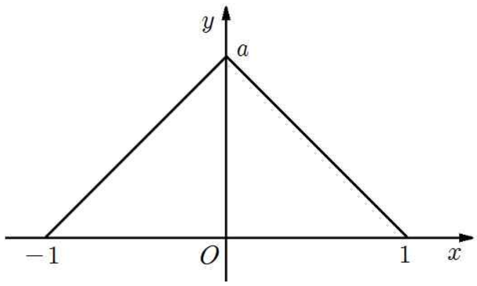



**4 [15]** 아래 그림과 같이 각 $\angle P$가 $90^\circ$인 직각삼각형 $APB$에서 변 $AP$를 $n$등분한 점을 각각 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$이라 하고 변 $BP$를 $n$등분한 점을 각각 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$이라고 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{A_kB_k}^2$을 구하시오..



# [답안]

**1** 구간 $[-1, 1]$에서 정의된 연속확률변수 $X$의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.




(1) 상수 $a$의 값을 구하시오.

(2) 어떤 시행에서 사건 $A$가 일어날 확률 $p$가 $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right)$일 때, $p$의 값을 구하시오.

(3) 이 시행을 $10$번 반복한 독립시행에서 사건 $A$가 $1$번 이상 일어날 확률을 구하시오.

**(예시 답안)**

(1) $f(x)$가 연속확률밀도함수이므로 삼각형 넓이가 $\frac{1}{2} \times 2 \times a = 1$이고, $a = 1$이다.

또는 $2\int_0^1 a(1-x)\,dx = 2a\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 2a(\frac{1}{2}) = 1$ 이므로 $a = 1$이다.

(2) $P(A) = P\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\,dx = 2\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3}\right] = \frac{3}{4}$

(3) 여사건을 이용하여 구한다.

사건$A$가 일어나지 않을 확률이$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$이므로, 10번 반복한 독립시행에서 사건 A가 한 번도 일어나지 않을 확률을 1에서 빼면 구하는 확률은 $1 - {}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{4^{10}}$이다.

**2** 세 점 $P(0,1)$, $A(-1,0)$, $B(1,0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $APB$에서 점 $A$를 지나는 직선 $y=\frac{1}{n}(x+1)$ $(n \geq 2$, 자연수)이 선분 $PB$와 만나는 점을 $C_n$이라 하고, 점 $C_n$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 $D_n$이라고 하자.

(1) 삼각형 $AC_nD_n$의 외접원의 중심 $(x_n, y_n)$을 구하시오.

(2) 극한값 $\lim_{n\to\infty} x_n$과 $\lim_{n\to\infty} y_n$을 구하시오..

**(예시 답안)**

(1) $y=\frac{1}{n}(x+1)$과 $y=1-x$의 교점을 구하면

=> $x=\frac{n-1}{n+1}$, $y=1-\frac{n-1}{n+1}=\frac{2}{n+1}$

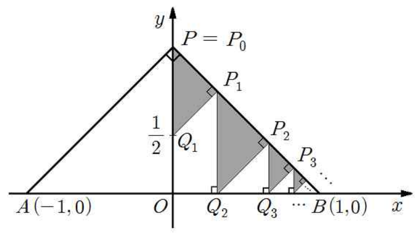
이므로 교점 $C_n$의 좌표는 $\left(\frac{n-1}{n+1}, \frac{2}{n+1}\right)$이다.

직감삼각형 $AC_nD_n$의 외접원의 중심$(x_n, y_n)$ 은 빗변$AC_n$의 중점이다.

따라서 $(x_n, y_n)=\left(\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$이다.

(2) (1)로부터 $\lim_{n\to\infty} x_n=0$, $\lim_{n\to\infty} y_n=0$ 이다.

**3** 아래 그림과 같이 각 $\angle P$가 $90^\circ$인 직각삼각형 $APB$ 내부의 점 $Q_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$에서 선분 $PB$에 내린 수선의 발을 $P_1$이라 하고, 점 $P_1$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 $Q_2$, 점 $Q_2$에서 선분 $PB$에 내린 수선의 발을 $P_2$라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 삼각형 $P_{n-1}Q_nP_n$의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합을 구하시오.




**(예시답안)**

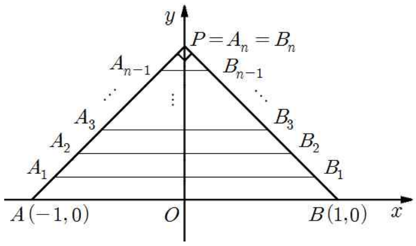
등변이 $a$, 빗변이 $l$인 직각이등변 삼각형의 넓이 $S$는 $S=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}l^2\ (l^2=2a^2)$이고, 직각이등변 삼각형의 빗변이 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \cdots$ 이므로

$S_1=\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^2$, $S_2=\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{64}$, $S_3=\frac{1}{4}(\frac{3}{8})^2=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{64}\right)$, $S_4=\frac{1}{4}(\frac{3}{16})^2=\frac{1}{4^2}(\frac{9}{64}), \cdots$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$은 $n \geqq 2$일 때 초항이 $\frac{9}{64}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 무한등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + \sum_{n=2}^{\infty} S_n = \frac{1}{16}+\frac{9}{64}\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\right)=\frac{1}{16}+\frac{9}{64}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}=\frac{1}{4}$$ 이다.

**4** 아래 그림과 같이 각 $\angle P$가 $90^\circ$인 직각삼각형 $APB$에서 변 $AP$를 $n$등분한 점을 각각 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$이라 하고 변 $BP$를 $n$등분한 점을 각각 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$이라고 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}^2$을 구하시오.




**(예시답안)**

$y=1-x$이므로 $\overline{A_kB_k}=2\left(1-\frac{k}{n}\right)$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\overline{A_kB_k})^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}4\left(1-\frac{k}{n}\right)^2=4\int_0^1(1-x)^2dx$

$=4\left[-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]_0^1=\frac{4}{3}$

**[문제 2]**

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=kx+1$ ($k$는 실수)의 두 교점을 $P_k$, $Q_k$라 하고 두 점 $P_k$, $Q_k$에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 두 접선의 교점을 $R_k$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

**1 [15]** (1) 점 $R_k$의 좌표를 구하시오.

(2) 점 $R_k$가 그리는 도형을 좌표평면에 나타내시오.

**2 [10]**삼각형 $P_kQ_kR_k$의 무게중심이 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프 위에 있을 때, 상수 $a, b, c$의 값을 구하시오.

**3 [15]** 2번에서 얻은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+1$의 두 교점을 $A_k$, $B_k$라 할 때, $\lim_{k\to\infty}\frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{P_kQ_k}}$를 구하시오.

**4 [10]** 삼각형 $P_kQ_kR_k$의 넓이를 나타내는 함수를 $g(k)$라 할 때, 극한값 $\lim_{k\to\infty}\frac{g(k)}{k^3}$를 구하시오.

# [답안]

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=kx+1$ ($k$는 실수)의 두 교점을 $P_k$, $Q_k$라 하고 두 점 $P_k$, $Q_k$에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 두 접선의 교점을 $R_k$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

1 (1) 점 $R_k$의 좌표를 구하시오.
(2) 점 $R_k$가 그리는 도형을 좌표평면에 나타내시오.

**(예시 답안)**

(1) $P_k(\alpha,\alpha^2)$, $Q_k(\beta,\beta^2)$라 놓으면($(\alpha<0<\beta)$ $\alpha,\beta$는 방정식 $x^2-kx-1=0$의 두 근이다.

그러므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha+\beta=k,\ \alpha\beta=-1$$

$P_k$점의 접선 $y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)$ => $y=2\alpha x-\alpha^2$

$Q_k$점의 접선 $y-\beta^2=2\beta(x-\beta)$ => $y=2\beta x-\beta^2$

두 접선의 교점 좌표 구하기

$x$좌표=> $2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$ => $2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2$

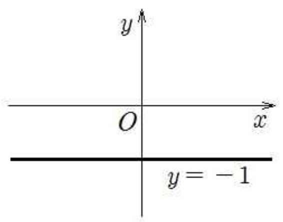
그러므로 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{k}{2}$

$y$좌표=>$y=2\alpha x-\alpha^2$에 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$대입하면

$$y=2\alpha\frac{(\alpha+\beta)}{2}-\alpha^2=\alpha\beta=-1\text{이다.}$$

그러므로 교점 좌표는 $R_k$는$\left(\dfrac{k}{2},-1\right)$이므로

(2) 교점$R_k$는 $k$값과 상관없이 직선 $y=-1$위에 있게 되어 교점 좌표$R_k$는 직선 $y=-1$ 그래프 위에 있다.



**2** 삼각형 $P_kQ_kR_k$의 무게중심이 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프 위에 있을 때, 상수 $a, b, c$의 값을 구하시오.

**(예시 답안)**

세 점 $P_k(\alpha, \alpha^2)$, $Q_k(\beta, \beta^2)$, $R_k\left(\frac{k}{2}, -1\right)$이므로

$$\text{삼각형 } P_kQ_kR_k \text{의 무게중심 좌표} = \left(\frac{\alpha+\beta+\frac{k}{2}}{3}, \frac{\alpha^2+\beta^2+(-1)}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{k+\frac{k}{2}}{3}, \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(-1)}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{3k}{6}, \frac{k^2+1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{k}{2}, \frac{k^2+1}{3}\right)$$

그러므로 $k=2x$로부터 무게 중심이 놓인 함수는

$$y=\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

그러므로 $a=\frac{4}{3}$, $b=0$, $c=\frac{1}{3}$이다.

**3** 2번에서 얻은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+1$의 두 교점을 $A_k$, $B_k$라 할 때, $\lim_{k\to\infty}\frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{P_kQ_k}}$를 구하시오.

**(예시 답안)**

$y=\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}$과 $y=kx+1$의 두 교점의 $x$좌표를 $a<0<b$라 하자.

두 함수를 연립하여 얻는 이차방정식 $4x^2-3kx-2=0$의 근과 계수 관계에 의해 $a+b=\frac{3k}{4}$, $ab=-\frac{1}{2}$이다.

$$\begin{aligned}\overline{A_kB_k}&=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}\\&=\sqrt{(b-a)^2(1+(b+a)^2)}\\&=(b-a)\sqrt{(1+(b+a)^2)} \qquad \Leftarrow b-a=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{\left(\frac{3k}{4}\right)^2-4\left(-\frac{1}{2}\right)}\\&=\sqrt{\left(\frac{3k}{4}\right)^2-4\left(-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{1+k^2}\\&=\sqrt{\frac{9k^2}{16}+2}\sqrt{1+k^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{P_kQ_k}&=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2(1+(\beta+\alpha)^2)}\\&=\sqrt{((\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta)^2(1+(\beta+\alpha)^2)}\\&=\sqrt{(k^2+4)(k^2+1)}\end{aligned}$$

그러므로 $\lim_{k\to\infty}\frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{P_kQ_k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{9k^2}{16}+2}\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{k^2+4}\sqrt{1+k^2}}=\frac{3}{4}$이다.

4 삼각형 $P_k Q_k R_k$의 넓이를 나타내는 함수를 $g(k)$라 할 때, 극한값 $\lim_{k\to\infty}\frac{g(k)}{k^3}$를 구하시오.

**(예시 답안)**

3번 답안에서 $\overline{P_k Q_k} = \sqrt{(k^2+4)(k^2+1)}$ 이고

직선 $kx - y + 1 = 0$과 점 $\left(\frac{k}{2}, -1\right)$사이 거리 공식에 의해

밑변$P_k Q_k$와 점 $R_k$사이 거리$= \frac{\left|k\left(\frac{k}{2}\right)+1+1\right|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{k^2+2}{2\sqrt{k^2+1}}$

삼각형$P_k Q_k R_k$ 넓이$= \frac{1}{2}\overline{P_k Q_k} \times$(밑변$P_k Q_k$와 점 $R_k$사이 거리)

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(k^2+4)(k^2+1)}\,\frac{k^2+2}{2\sqrt{k^2+1}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{k^2+4}\,(k^2+2) = g(k)$$

극한값 $\lim_{k\to\infty}\frac{g(k)}{k^3} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k^2+2)\sqrt{k^2+4}}{4k^3} = \frac{1}{4}$이다.