문항카드 양식 2 (수리계열 - 수학)

[한국산업기술대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	일반 전형 (논술)	
해당 대학의 계열(과목)/문항번호	공학계열/ 1번 문항	
출제범위	수학과 교육과정 과목명	미적분1
	핵심 개념 및 용어	도함수, 함수의 증가 감소, 평균값정리
예상소요 시간	40 분	

2. 문항 및 제시문

문제1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[정리1] $f(x)$가 어떤 구간에서 미분 가능할 때 그 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
(2) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

[정리2](평균값 정리)
함수$f(x)$가 열린구간(a,b)에서 미분 가능하고 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$인 c가 a와 b사이에 존재한다.

(1) $f(x)=x^3+ax^2+ax$가 증가함수가 되게 하는 a값이 속하는 열린구간을 (α,β)라 할 때, $\beta-\alpha$의 최댓값을 구하시오.

(2)$f(x)=x^3+ax^2+ax$가 증가함수일 때 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $f(x)=g(x)$를 만족하는 x를 모두 구하시오.

(3) 2번 문제에서 제시한 $f(x)=g(x)$를 만족하는 x에 대하여 $f'(x)=g'(x)$이 성립하기 위한 a의 값을 구하시오.

(4) 2번에서 구한 x값 중에서 0아닌 값을 k라 할 때 다음 식

$$f(k) = kf'(c)$$

이 성립하는 c가 존재함을 설명하고 c를 구하시오.

3. 일반정보

출제 범위 : 미적분I- 함수의 증가와 감소, 평균값 정리

수학II- 함수의 뜻과 그래프, 역함수

4. 출제근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
	교육과정	미적분I
	성취기준	다항함수와 도함수를 구할 수 있다. 역함수의 뜻과 함수의 관계를 알 수 있다. 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.
	성취수준	상. 도함수와 역함수의 관계를 이해하고 평균값 정리를 적용할 수 있다. 중. 역함수와 도함수와의 관계를 적용할 수 있다. 하. 3차 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고도서	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 도서	미적분I	류희찬외 17인	천재교과서	2015	126
	미적분I	김찬동외 14인	교학사	2014	114
기타					

5. 문항해설

증가 또는 감소하는 함수는 역함수가 존재함을 이해하고 함수와 역함수 관계의 그래프 특성인 $y = x$에 대한 대칭성을 이해하는가를 판단하고자 하였다. 또한 평균값 정리를 이해하고 활용할 수 있는가를 평가하고자 하였다. 문제 해결 과정에서 다항식의 미분과 식의 인수분해, 조건에 맞게 수식을 처리하는 수리적 계산 능력을 평가하려 하였다.

6. 채점기준

하위문항	채점기준	배점
1	어떤 구간에서 $f'(x) > 0$이면 구간에서 f는 증가함수라는 도함수와 증가함수의 관계를 이해한다.	10
2	함수$f(x)$와 역함수$g(x)$의 그래프가 $y = x$에 대칭임을 이해한다.	10
3	함수$f(x)$의 도함수와 역함수$g(x)$의 도함수의 값이 같아지는 조건은 $f'(x) = g'(x) = 1$임을 이해하고 적용한다.	15
4	주어진 함수에 대하여 구간에서 평균값 정리를 적용할 수 있다.	15

※ 하위문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점기준을 작성함

※ 채점기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함

7. 예시답안

(1)$f(x) = x^3 + ax^2 + ax$가 증가함수가 되게 하는 a값이 속하는 열린구간을 (α, β)라 할 때, $\beta - \alpha$의 최댓값을 구하시오.

(예시답안) $f(x) = x^3 + ax^2 + ax$가 증가함수가 될 조건은 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a > 0$이다. 이차 함수가 0보다 클 조건으로 이차식의 판별식을 사용하면

$$D = (2a)^2 - 4(3)a = 4a^2 - 12a = 4a(a-3) < 0$$

이다. 이로부터 $0 < a < 3$에서 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a > 0$임을 알 수 있다.
그러므로 $\alpha = 0, \beta = 3$일 때 문제에서 원하는 가능한$\beta - \alpha$의 최댓값$\beta - \alpha = 3$을 얻는다.

(2)$f(x) = x^3 + ax^2 + ax$가 증가함수일 때 f의 역함수를 g라 하자. $f(x) = g(x)$를 만족하는 x를 모두 구하시오.

(예시답안)

역함수는 $y=x$에 대칭이므로 $f(x)=g(x)$인 x는 $f(x)=x$을 만족한다.

$$f(x)-x=0,$$
$$x^3+ax^2+ax-x=0$$
$$x(x+1)(x+a-1)=0.$$

이로부터 구하는 x는 $x=0,\ x=-1,\ x=1-a$이다.

(3) 2번 문제에서 제시한 $f(x)=g(x)$를 만족하는 x에 대하여 $f'(x)=g'(x)$이 성립하기 위한 a의 값을 구하시오.

(예시답안)

$f'(x)=g'(x)$이면 $f'(x)=1$이므로 $f(x)=x$인 조건을 만족하면서 $f'(x)=1$이 되도록 하는 a의 값을 찾는 문제이다. 2번에서 구한 $x=0, x=-1,\ x=1-a$을 $f'(x)=1$에 대입한다.

$x=0$일 때 $f'(0)-1=3\cdot 0^2+2a\cdot 0+a-1=0$이므로 $a=1$이다.

$x=-1$일 때 $f'(-1)-1=3(-1)^2+2a(-1)+a-1=0$이므로 $a=2$이다.

$x=1-a$일 때

$$f'(1-a)-1=3(1-a)^2+2a(1-a)+a-1=(1-a)(2-a)=0$$

이므로 $a=1,\ a=2$이다. 그러므로 a는 1과 2 이다.

(4) 2번에서 구한 x값 중에서 0아닌 값을 k라 할 때 다음 식

$$f(k)=kf'(c)$$

이 성립하는 c가 존재함을 설명하고 c를 구하시오.

(예시답안)

$f(0)=0$이므로 평균값정리에 의해

$$\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=f'(c)\text{인}$$

c가 0과 k 사이에 존재함을 알 수 있다. 그러므로 $f(k)=kf'(c)$되는 c가 존재한다.

또한 k는 $f(x)=x$를 만족하므로 $f(k)=k$이고 $\dfrac{f(k)}{k}=1=f'(c)$ 이다.

$f'(c)=3c^2+2ac+a=1$을 만족하는 c를 구하면

$$c=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-3a+3}}{3}$$

이다.

문항카드 양식 2 (수리계열 - 수학)

[한국산업기술대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	일반 전형 (논술)	
해당 대학의 계열(과목)/문항번호	공학계열/ 2번 문항	
출제범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계, 수학2
	핵심 개념 및 용어	경우의 수, 확률의 곱의 법칙, 조건부 확률,합성함수
예상소요 시간	40 분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2]

자연수 1부터 n까지 (단, $n \geq 4$) 숫자가 적힌 n개의 구슬이 들어 있는 주머니에서 구슬을 하나씩 꺼낸 후에 적힌 번호를 확인하고 다시 주머니 넣는 실험을 한다고 하자. 주머니에서 구슬을 꺼내는 순서와 구슬에 적힌 숫자를 대응시키는 관계를 함수 f라고 하자. 예를 들어 $f(i)=k$라는 것은 주머니에서 i번째 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 k라는 것을 의미한다.

(1) $n=4$일 때, 함수 f가 $i \leq f(i)$ $(i=1,2,3,4)$를 만족시킬 확률을 구하시오.

(2) $n=4$일 때, 함수 f가 $f(2)=2$, $f(4)=4$, $f(1) \neq 1$, $f(3) \neq 3$를 만족시킬 확률을 구하시오.

(3) $n=4$일 때, 일대일함수 f가 $f(i) \neq i$와 $f(f(i))=i$ $(i=1,2,3,4)$를 만족시킬 확률을 구하시오.

(4) $n=10$일 때, 함수 f가 $2i+f(i) > 10$ $(i=1,2,...,10)$를 만족시킬 확률을 구하시오.

3. 일반정보

출제 범위 : 확률과 통계- 경우의 수, 확률의 곱의 법칙, 조건부 확률

수학2- 일대일 함수, 합성함수

4. 출제근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
2번	교육과정	확률과 통계, 수학2
	성취기준	확률의 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수, 확률을 구할 수 있다. 일대일 함수와 합성함수를 응용 할 수 있다.
	성취수준	상. 조건부 확률과 함수의 합성, 확률의 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고 응용 할 수 있다. 중. 확률의 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고 응용 할 수 있다. 하. 경우의 수를 이해하고 확률을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고도서	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 도서	확률과 통계	정상권외 7인	금성출판사	2014	85
	확률과 통계	황선욱외 10인	좋은책 신사고	2014	68
기타					

5. 문항해설

함수의 정의와 확률 개념을 연계한 문제로 구성하였다. 주어진 실험에서 함수 관계와 조건을 이해하고 있는지를 먼저 평가하고, 이 조건을 만족하는 경우의 수를 구하여 확률과 조건부 확률을 정확히 계산할 수 있는 지를 평가하고자 하였다.

6. 채점기준

하위문항	채점기준	배점
1	경우의 수를 이해하고 확률을 계산할 수 있다.	10
2	함수의 관계를 이해하고 경우의 수와 확률의 곱의 법칙을 계산할 수 있다.	10
3	합성함수와 일대일 함수와 조건부 확률을 계산할 수 있다.	15
4	주어진 조건을 만족하는 경우의 수를 구해서 확률을 계산할 수 있다.	15

※ 하위문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점기준을 작성함

※ 채점기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함

7. 예시답안

(1) $n=4$일 때, 함수 f가 $i \le f(i)$ $(i=1,2,3,4)$를 만족시킬 확률을 구하시오.

(예시답안) $i=4$이면 $f(4)=4$인 경우만 가능하고,

$i=3$이면 $f(3)=3,4$인 경우가 가능하다.

$i=2$이면 $f(2)=2,3,4$가 가능하고,

$i=1$이면 $f(1)=1,2,3,4$가 가능하다.

그러므로 모두 $1\times2\times3\times4=24$가지의 경우의 수가 가능하다.

가능한 함수의 총 개수는 $1,2,3,4$에서 중복을 허용하여 4개를 뽑는 경우의 수와 같아 $4^4=256$. 그러므로 구하는 확률은 $\frac{24}{256}$이다.

(2) $n=4$일 때, 함수 f가 $f(2)=2$, $f(4)=4$, $f(1)\ne1$, $f(3)\ne3$를 만족시킬 확률을 구하시오.

(예시답안) $f(2)=2, f(4)=4, f(i)\ne i,\ i=1,3$ 이므로

$i=1$일 때 $f(i)=2,3,4$의 3가지 경우가 가능하고

$i=3$일 때는 $f(i)=1,2,4$의 3가지 경우가 가능하므로

총 $3\times3=9$의 경우가 있다. 그러므로 확률은 $\frac{9}{256}$이다.

(3) $n=4$일 때, 일대일 함수 f는 $f(i)\ne i$와 $f(f(i))=i$ $(i=1,2,3,4)$를 만족시킬 확률을 구하시오.

(예시답안)

$n=4$일 때, 일대일 함수의 개수는 $1,2,3,4$에서 중복 없이

4개를 선택하는 경우의 수이므로 $4!=24$ 이다.

각 $i=1,2,3,4$에 대해서 $f(i)\ne i$ 이다.

또한, 합성함수 $f(f(i))=i$가 되는 경우는, $i=1$일 때 만일$f(1)=2$라고 하면 $f(2)=1$이 되어야만 $f(f(1))=1$가 된다.

그러므로 나머지 $f(3)=4$, $f(4)=3$이 자동적으로 결정이 된다.

결국 $f(1)$이 가능한 값이 1을 제외한 3가지이므로 구하는 경우의 수는 3가지이다.

또한 일대일 함수일 경우의 수는 $4!$이다. 그러므로 구하는 확률은 확률이므로$\frac{3}{4!}=\frac{1}{8}$이다.

(4) $n=10$일 때, 함수 f가 $2i+f(i)>10$ $(i=1,2,\ldots,10)$를 만족시킬 확률을 구하시오.

(예시답안) 주어진 조건식을 $f(i)>10-2i$로 쓰면,

$i=1$일 때 $f(1)>10-2\times1=10-2=8$이 된다.

그래서

가능한 $f(1)$의 값은 9와 10, 모두 2가지이다.

$i=2$일 때 $f(2) > 10-2\times2=6$ 이므로 가능한 $f(2)$의 값은 7, 8, 9, 10, 모두 4가지이다.

$i=3$일 때 $f(3) > 10-2\times3=4$ 이고 가능한 $f(3)$의 값은 5, 6, 7, 8, 9, 10, 모두 6가지이다.

$i=4$일 때 $f(4) > 10-2\times4=2$ 이다. 따라서 가능한 $f(4)$의 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 모두 8가지이다.

$i=5$일 때 $f(5) > 10-2\times5=0$이므로 가능한 $f(5)$의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10으로 10가지 경우가 가능하다. 마찬가지로,

$i \geq 6$이면 항상 $f(i)$는 10가지 경우가 가능하다. 그러므로 구하는 확률은

$\left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{10}{10}\right)\left(\frac{10}{10}\right)\left(\frac{10}{10}\right)\left(\frac{10}{10}\right)\left(\frac{10}{10}\right)\left(\frac{10}{10}\right)=\frac{384}{10^4}=\frac{24}{625}$이다.