2014학년도 울산대학교 의과대학 수시 수리논술

<출제의도>

수리 과학적 개념에 대한 기초적이고 핵심적인 내용의 이해 정도를 파악하고, 이와 관련된 문제에 대한 해결능력과 해결한 결과에 대한 논리적인 표현력을 평가함을 목적으로 하였다.

<문제>

1. (75점) B 는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정육면체이다. S 는 중심이 B 의 무게 중심과 일치하는 반지름이 1 인 구이다. B 의 표면에서 한 점을 고르고 S 의 표면에서 세 점을 골라서 만들 수 있는 사면체의 부피의 최댓값을 구하여라.

<채점기준>

구면상의 세 점이 삼각형을 이룰 때 이 세 점을 포함하는 평면과 구의 표면의 교집합은 원이다. 이 원을 포함하는 평면과 구의 중심의 수직 거리를 x라 하면 $0 \le x \le 1$이고 교집합인 원의 반지름은 $\sqrt{1-x^2}$이다. 평면과 구의 중심의 거리 x를 고정 시켰을 때, 정육면체 B의 표면의 점에서 평면까지의 수직 거리의 최댓값은 정육면체의 한 꼭짓점에서 구의 중심을 지나는 직선과 평면이 수직을 이룰 때 그 꼭짓점과 평면까지의 거리가 되고 이 값은 $3+x$이다. 반지름이 $\sqrt{1-x^2}$인 원 위의 세 점이 이루는 삼각형의 면적의 최댓값은 $3\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)$이다. 따라서 단면에서 중심까지의 거리가 x인 삼각형을 밑변으로 하는 사면체의 최대 부피는 $(3+x)\times 3\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)\times\frac{1}{3}$이다. 이 값은 $x=\frac{2}{3}\sqrt{3}-1$에서 최댓값을 가진다. 값은 $\frac{4}{3}$이다.

<문제>

2. (75점) $\alpha = \left\lceil \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{2014}\frac{1}{k} \right\rceil$ 이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty} \sin^{\alpha}(\pi\sqrt{n^{2014}+n^{1012}+1})$$

을 구하여라. 여기서 $\lceil x \rceil$ 는 x 보다 크거나 같은 최소 정수이다.

(예, $\lceil 10 \rceil = 10$, $\lceil 10.1 \rceil = 11$, $\lceil 10.9 \rceil = 11$)

<채점기준>

그림을 이용하여 $\sum_{k=1}^{2014}\frac{1}{k}$ 과 $\int_{1}^{2014}\frac{1}{x}\,dx$ 의 크기를 비교하면

$$\int_{1}^{2014}\frac{1}{x}\,dx < \sum_{k=1}^{2014}\frac{1}{k} < \int_{1}^{2014}\frac{1}{x}\,dx + 1$$

을 얻는다.

$$6 = \log_3 3^6 < \log_3 2014 < \ln 2014 < \log_2 2014 < \log_2 2^{11} = 11$$

으로부터 $6 < \sum_{k=1}^{2014}\frac{1}{k} < 12$ 을 얻고 그러므로 $\alpha = 2$이다.

다음, $\sin^2 x$ 의 주기가 π 임을 상기하면

$$\begin{aligned}\sin^2(\pi\sqrt{n^{2014}+n^{1012}+1}) &= \sin^2(\pi\sqrt{n^{2014}+n^{1012}+1} - \pi n^{1007}) \\ &= \sin^2\left(\pi\frac{n^{1012}+1}{\sqrt{n^{2014}+n^{1012}+1}+n^{1007}}\right)\end{aligned}$$

을 얻는다.

I) $n = 2k$, (k 는 자연수) 인 경우, 다시 주기성을 이용하면

$$\sin^2\left(\pi\frac{n^{1012}+1}{\sqrt{n^{2014}+n^{1012}+1}+n^{1007}}\right) = \sin^2\left(\pi\frac{n^{1012}+1}{\sqrt{n^{2014}+n^{1012}+1}+n^{1007}} - \pi\frac{n^5}{2}\right)$$

이다. $n\to\infty$일 때 $a_n = \frac{n^{1012}+1}{\sqrt{n^{2014}+n^{1012}+1}+n^{1007}} - \frac{n^5}{2} \to 0$ 과 위 식을 이용하면

$$\lim_{k\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{(2k)^{2014}+(2k)^{1012}+1}) = 0$$

이다.

II) $n = 2k-1$, (k 는 자연수) 인 경우, 주기성을 이용하면

$$\sin^2\left(\pi\frac{n^{1012}+1}{\sqrt{n^{2014}+n^{1012}+1}+n^{1007}}\right) = \sin^2\left(\pi\frac{n^{1012}+1}{\sqrt{n^{2014}+n^{1012}+1}+n^{1007}} - \pi\frac{n^5}{2} + \pi\frac{1}{2}\right)$$

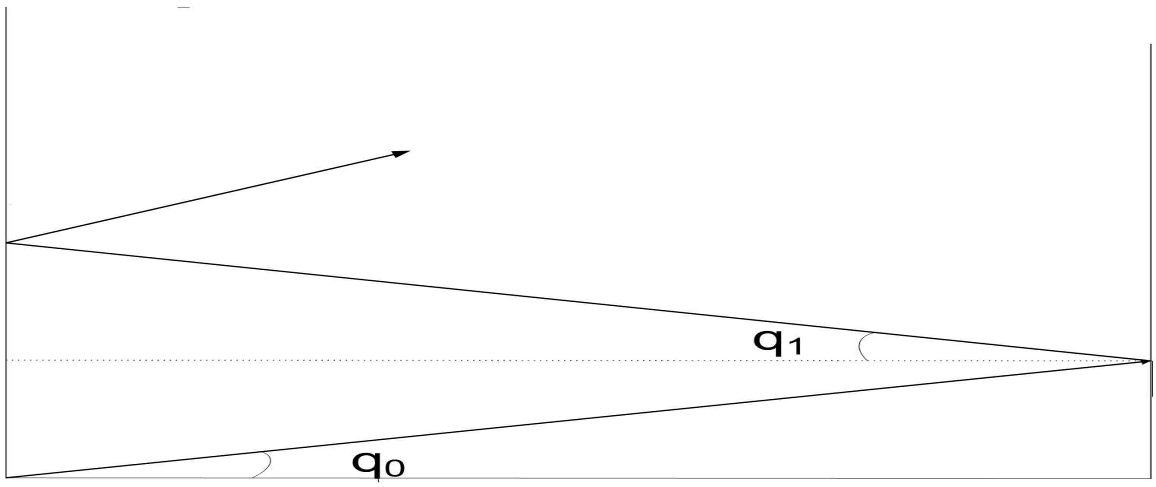
이다. $n \to \infty$ 일 때 $a_n \to 0$ 과 위 식을 이용하면

$$\lim_{k \to \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{(2k-1)^{2014} + (2k-1)^{1012} + 1} \right) = 1$$

이다. 그러므로 발산한다.

<문제>

3. (75점)



위 그림과 같이 지면에 수직이면서 $1m$ 떨어진 평행한 두 벽면 중 한 벽면이 지면과 닿은 한 지점으로부터 공을 다른 쪽 벽면으로 $q_0 = \dfrac{\pi}{8}$의 각도로 쏘아올린다고 할 때 공이 다른 쪽 벽면을 맞고 다시 반사되는 각도는 $q_1 = \dfrac{\pi}{16}$이다. 계속 공이 벽에 반사되어서 무한 번 움직인다고 가정할 때 $n+1(n \geq 1)$번째 반사각 q_{n+1}은 다음과 같은 규칙에 의해 결정된다.

$$q_n q_{n-1} = 2q_{n+1}q_{n-1} + q_{n+1}q_n, \qquad n \geq 1.$$

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{q_{n+1}}{q_n}$ 을 구하여라.

(2) 지면으로부터 공의 높이가 항상 $1m$를 넘지 않음을 보여라.

<채점기준>

(1) 양변을 적절하게 변형하면 $\dfrac{1}{q_{n+1}} = \dfrac{2}{q_n} + \dfrac{1}{q_{n-1}}$을 얻게 되고 양변에 q_n을 곱한 후 $a_n = \dfrac{q_{n+1}}{q_n}$이라 두면 우리는 $\dfrac{1}{a_n} = 2 + a_{n-1}$을 얻게 된다. 이제 $\dfrac{1}{\lambda} = 2 + \lambda$ 을 만족하는 양수 $\lambda = -1 + \sqrt{2}$ 를 잡고 두 식을 빼면 $\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{\lambda} = a_{n-1} - \lambda$ 를 얻게 되고 $\dfrac{1}{a_n} > 2$ 이므로 $|a_n - \lambda| \leq |a_n \lambda||a_{n-1} - \lambda| < \lambda|a_{n-1} - \lambda|$ 를 얻게 된다. 수학적 귀납법에 의해 $|a_n - \lambda| < \lambda^n|a_0 - \lambda|$ 이고, $\lambda < 1$ 이므로 극한정리로부터 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda$ 가 얻어진다.

(2) 문제 (1)에 의해 $q_n > q_{n+1}$ 이고 $\sum_{n=0}^{\infty} q_n$은 수렴한다. 실제로 $\frac{1}{q_{n+1}} > \frac{2}{q_n}$ 이므로 $q_{n+1} < \frac{1}{2} q_n$임을 알 수 있다. 그러므로 $\sum_{n=0}^{\infty} q_n < \frac{\pi}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\pi}{4}$ 을 얻게 되고 임의의 자연수 N에 대하여 $\tan\left(\sum_{n=0}^{N} q_n\right)$은 항상 1을 넘지 않는 양수임을 알 수 있다. 이 사실과 tan의 합 공식 $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$ 을 이용하여 수학적 귀납법을 쓰면 임의의 자연수 m에 대하여 $\sum_{n=0}^{m} \tan(q_n) \le \tan\left(\sum_{n=0}^{m} q_n\right)$ 가 성립함을 알 수 있다.

m번째 반사된 공의 높이는 $\tan\left(\sum_{n=0}^{m} q_n\right)$을 넘지 않는데 $\tan\left(\sum_{n=0}^{m} q_n\right) < \tan\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n\right)$ 이므로 위 식을 이용하여 $\sum_{n=0}^{\infty} \tan(q_n) \le \tan\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n\right) \le \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$이 됨을 알 수 있다.

<문제>

4. (75점) 다음 두 조건 I, II 을 만족하는 연속함수 $y=f(x)$ 을 구하여라.

I. 모든 실수 x 에 대하여 $f(f(x))=x$ 이다.

II. 모든 양수 x 에 대하여 $\int_{-x}^{0} f(t)dt - \int_{0}^{x^2} f(t)dt = x^3$ 이다.

<채점기준>

조건 I 에 의해 f가 연속인 일대일 대응이므로 증가함수이거나 감소함수이다. f가 증가함수라고 하자. 어떤 실수 x에 대해 $f(x)\neq x$라고 하면 $f(x)<x$ 또는 $f(x)>x$ 이다. $f(x)<x$이면 $x=f(f(x))<f(x)$ 이므로 모순이다. 또 $f(x)>x$이면 $x=f(f(x))>f(x)$ 이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x$이다. 이 경우에도

$$\int_{-x}^{0} f(t)dt - \int_{0}^{x^2} f(t)dt = \int_{-x}^{0} tdt - \int_{0}^{x^2} tdt = -x^2/2 - x^4/2 \neq x^3 (x>0)$$

으로 모순이므로 $f(x)$는 감소함수이고 그 그래프는 조건 I에 의해 $y=x$에 대해 대칭이다.

$$\int_{-x}^{0} f(t)dt - \int_{0}^{x^2} f(t)dt = x^3,\ x>0$$

의 양 변을 x에 관해 미분하면 $f(-x)-2xf(x^2)=3x^2$이고 따라서 $f(0)=0$이다.

$-\int_{0}^{a^2} f(x)dx$는 x축, 직선 $x=a^2$ 그리고 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 도형의 면적이다. 또 그래프가 $y=x$에 대칭이므로 $-\int_{0}^{a^2} f(x)dx$는 y축과 직선 $y=a^2$ 그리고 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 도형의 면적과 같다. 그러므로 $-\int_{0}^{a^2} f(x)dx = \int_{-b}^{0} (a^2-f(x))dx$, ($f(-b)=a^2$). 따라서

$$\begin{aligned} a^3 &= \int_{-a}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{a^2} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{-b}^{0} (a^2-f(x))dx \\ &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{-b}^{-a} (a^2-f(x))dx + \int_{-a}^{0} (a^2-f(x))dx \\ &= a^3 + \int_{-b}^{-a} (a^2-f(x))dx \end{aligned}$$

이므로 $\int_{-b}^{-a} (a^2-f(x))dx = 0$이다. $b>a$이면 $-b<x<-a$인 x에 대해 $a^2-f(x)>0$이므로 $\int_{-b}^{-a} (a^2-f(x))dx>0$이다. 또 $a<b$이면 $-a<x<-b$인 x에 대해 $a^2-f(x)<0$이므로 $\int_{-b}^{-a} (a^2-f(x))dx>0$이다. 그러므로 $a=b$이고 $f(-a)=a^2$이다. 결론적으로

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \le 0 \\ -\sqrt{x} & , \ x \ge 0 \end{cases}$$

이다.