2018학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 기출문제(자연계열 B형)

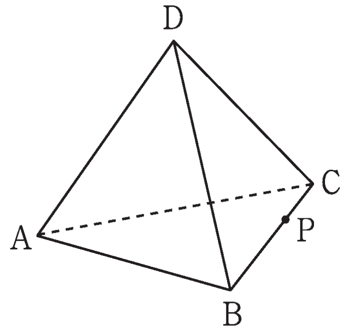
[문제 1] 함수 $f(x)=e^{x+x^2}+e^{x+\sqrt{x}}\ (x\ge 0)$ 와 $f(x)$의 역함수 $g(x)\ (x\ge 2)$ 에 대하여 정적분에 관한 다음 질문에 답하시오.

(1-1) $\displaystyle\int_0^1 e^{x+x^2}dx=A$ 일 때, 정적분 $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x+x^2}dx$ 를 A에 관한 식으로 나타내시오. (60점)

(1-2) 정적분 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ 의 값을 구하시오. (60점)

(1-3) 정적분 $\displaystyle\int_2^{2e^2} g(x)\,dx$ 의 값을 구하시오. (60점)

[문제 2] 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사면체 ABCD가 있다. 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 하고 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$라 하자.



(2-1) 세 꼭짓점 A, B, C를 포함하는 평면을 α라 하자. 점 D에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$를 $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$에 관한 식으로 나타내시오. (60점)

(2-2) 선분 AP의 중점을 Q라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$를 $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$에 관한 식으로 나타내고 $|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}|$를 구하시오. (60점)

(2-3) 점 R가 선분 AP 위를 움직일 때, 점 D와 점 R 사이의 거리를 L이라 하자. L^2의 최솟값을 구하시오. (60점)

[문제 3] 실수 전체의 집합에서 정의되는 함수 $f(x)=ae^x+x^2+bx+c$ 는 다음 조건을 만족시킨다. (단, a, b, c 는 실수이고 $a>0$ 이다.)

(가) $x(x-1)f(x)\geq 0$
(나) $g(x)=f'(x)$ 라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=(a+4)x-3$ 은 좌표평면의 $0<x<1$ 인 영역에서 만난다.

(3-1) 조건 (가)를 이용하여 $f(0)$ 과 $f(1)$ 의 값을 각각 구하시오. (60점)

(3-2) b 와 c 를 a 에 관한 식으로 각각 나타내시오. (60점)

(3-3) a 값의 범위를 구하시오. (60점)

(3-4) 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$ 에서의 접선의 y 절편을 k 라 하자.
$\dfrac{4-4e}{k+1}$ 가 자연수가 되는 실수 a 의 값을 모두 구하시오.
(단, $2.7<e<2.8$ 이다.) (60점)

2018학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 출제기준표(자연계열 B형)

1번 문항 출제 의도

부분적분법과 치환적분법을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는 지를 평가한다.

1번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분II	김원경 외	비상교육	2016	139-149
	미적분II	황선욱 외	좋은책 신사고	2016	141-146
	미적분II	김창동 외	교학사	2015	176-179

2번 문항 출제 의도

선분의 내분점과 벡터의 실수배를 이해하고 두 점 사이의 거리를 벡터를 이용하여 계산할 수 있는 지를 평가한다.

2번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2016	188-193
	기하와 벡터	신항균 외	지학사	2015	165-169

3번 문항 출제 의도

미분법을 사용하여 주어진 영역에서 두 곡선이 만나는 조건을 구하고 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는 지를 평가한다.

3번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 II	김창동 외	교학사	2016	143-145
	미적분 II	이준열 외	천재교육	2016	152-154

2018학년도 세종대학교 수시모집

논술고사 채점기준표(자연계열 B형)

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	• $\int_0^1 2xe^{x+x^2}dx = e^2 - 1 - A$: 60점	60
1-2	• 치환으로 등식 $\int_0^1 e^{x+\sqrt{x}}dx = \int_0^1 2ue^{u+u^2}du$를 구하면 : 30점 • 답 $e^2 - 1$를 구하면 : 60점	60
1-3	(1안) • $y = g(x)$로 치환을 시도하여 $\int_2^{2e^2} g(x)dx = \int_0^1 yf'(y)dy = [yf(y)]_0^1 - \int_0^1 f(y)dy$ 를 구하면 (+30점) • 최종적으로 답 $e^2 + 1$을 구하면 (+30점) (2안) • 그림의 사각형의 넓이를 이용하여 $\int_2^{2e^2} g(x)\,dx = 2e^2 - \int_0^1 f(x)dx$ 또는 $\int_2^{2e^2} g(x)\,dx + \int_0^1 f(x)dx = 2e^2$ 까지 구하면 (+30점) • 최종적으로 답 $e^2 + 1$을 구하면 (+30점)	60

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	• $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{\vec{b}}{3}+\frac{\vec{c}}{3}$를 구하면 (+30점) • $\{k(\vec{b}+\vec{c})-\vec{d}\}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=0$를 쓰면 (+30점) • 최종적으로 답 $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\frac{\vec{b}}{3}+\frac{\vec{c}}{3}-\vec{d}$를 구하면 (+30점)	60
2-2	• $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\frac{\vec{b}}{6}+\frac{\vec{c}}{3}-\vec{d}$를 구하면 (+30점) • 내적을 이용하여 $\lvert\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\rvert^2$을 구하고 최종 답 $\frac{5}{6}$를 구하면 (+30점)	60
2-3	• $\overrightarrow{\mathrm{DR}}=t\left(\frac{\vec{b}}{3}+\frac{2\vec{c}}{3}\right)-\vec{d}$를 구하면 (+30점) • $\lvert\overrightarrow{\mathrm{DR}}\rvert^2=\overrightarrow{\mathrm{DR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DR}}=\frac{7}{9}t^2-t+1$을 올바르게 구하고 답 $\frac{19}{28}$가 맞으면 (+30점)	60

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	• $x \le 0$ 또는 $x \ge 1$일 때, $f(x) \ge 0$을 기술하면 (+20점) • $0 \le x \le 1$에서 $f(x) \le 0$을 기술하면 (+20점) • $f(0)=0$과 $f(1)=0$을 보이면 (+20점)	60
3-2	• $f(0)=0$을 이용하여 $c=-a$임을 보이면 (+30점) • $f(1)=0$임을 이용하여 $b=a-ae-1$임을 보이면 (+30점)	60
3-3	• "곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=(a+4)x-3$이 $x=1$일 때 만난다."를 언급하면 (+15점) • 풀이과정이 있고 $a>\frac{2}{e-1}$를 구하면 (+15점) • 풀이과정이 있고 $a<\frac{2}{e-2}$를 구하면 (+15점) • 최종적으로 답 $\frac{2}{e-1}<a<\frac{2}{e-2}$를 구하면 (+15점)	60
3-4	• 풀이과정이 있고 답 $a=2$ 또는 $a=\frac{4}{3}$를 모두 구하면 (60점) • 풀이과정이 있고 답 중 하나인 $a=2$를 구하면 (30점) • 풀이과정이 있고 답 중 하나인 $a=\frac{4}{3}$를 구하면 (30점)	60

2018학년도 세종대학교 수시모집

논술고사 답안 예시(자연계열 B형)

[문제 1]

(1-1) (1안) $\int_0^1 2xe^{x+x^2}dx = \int_0^1 e^x \cdot 2xe^{x^2}dx = \left[e^x \cdot e^{x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot e^{x^2}dx = e^2 - 1 - A$

(2안) $\int_0^1 2xe^{x+x^2}dx = \int_0^1 (2x+1)e^{x+x^2}dx - \int_0^1 e^{x+x^2}dx = \left[e^{x+x^2}\right]_0^1 - A = e^2 - 1 - A$

(1-2) $\int_0^1 e^{x+\sqrt{x}}dx$에서 $u = \sqrt{x}$로 치환하면 $u^2 = x$이고 $dx = 2u\,du$이다.

따라서 $\int_0^1 e^{x+\sqrt{x}}dx = \int_0^1 2ue^{u+u^2}du = e^2 - 1 - A$이다. 그러므로

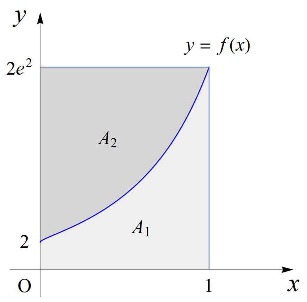
$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x \cdot e^{x^2}dx + \int_0^1 e^x \cdot e^{\sqrt{x}}dx = A + e^2 - 1 - A = e^2 - 1$ 이 된다.

(1-3) (1안) $\int_2^{2e^2} g(x)dx$에서 $y = g(x)$로 치환하자. 그러면 $x = f(y)$가 되고 $dx = f'(y)dy$이다. 따라서

$$\int_2^{2e^2} g(x)dx = \int_0^1 yf'(y)dy = [yf(y)]_0^1 - \int_0^1 f(y)dy = 2e^2 - \int_0^1 f(x)dx = e^2 + 1$$

이다.

(2안)



$f(0) = 0$, $f(1) = 2e^2$ 이고 $f'(x) > 0$이므로 오른쪽과 같이 $f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다. 역함수의 성질을 이용하면, 오른쪽 그림에서

$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx$, $A_2 = \int_2^{2e^2} g(x)\,dx$

이다. 그러므로 다음을 얻는다.

$\int_2^{2e^2} g(x)\,dx = A_2 = 2e^2 - A_1 = e^2 + 1$

[문제 2]

(2-1) (1안) 점 D의 평면 α 위로의 수선의 발 H는 삼각형 ABC의 무게중심이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{\vec{b}}{3}+\dfrac{\vec{c}}{3}$이다. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\dfrac{\vec{b}}{3}+\dfrac{\vec{c}}{3}-\vec{d}$이다.
(2안) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k(\vec{b}+\vec{c})$이고 $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=k(\vec{b}+\vec{c})-\vec{d}$이다. $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DH}}$로부터
$\{k(\vec{b}+\vec{c})-\vec{d}\}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=0$이다. 따라서 $k=\dfrac{1}{3}$이다. 그러므로 답은 $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})-\vec{d}$이다

(2-2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\vec{b}}{3}+\dfrac{2\vec{c}}{3}$이고 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\vec{b}}{6}+\dfrac{\vec{c}}{3}$이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\dfrac{\vec{b}}{6}+\dfrac{\vec{c}}{3}-\vec{d}$이고

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right|^2=\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+1+\frac{1}{18}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{25}{36}$$

이다. 그러므로 답은 $\sqrt{\dfrac{25}{36}}=\dfrac{5}{6}$이다.

(2-3) R가 선분 $\overline{\mathrm{AP}}$를 t대 $1-t$로 내분하는 점이라 하면, $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\left(\dfrac{\vec{b}}{3}+\dfrac{2\vec{c}}{3}\right)t$이고

$\overrightarrow{\mathrm{DR}}=\left(\dfrac{\vec{b}}{3}+\dfrac{2\vec{c}}{3}\right)t-\vec{d}$이다. 그러므로 $\left|\overrightarrow{\mathrm{DR}}\right|^2=\overrightarrow{\mathrm{DR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DR}}=\dfrac{7}{9}t^2-t+1$이다.

따라서 L^2의 최솟값은 $t=\dfrac{9}{14}$일 때 $\dfrac{19}{28}$이다.

[문제 3]

(3-1) $f(x)$는 연속함수이다. $x(x-1)f(x) \ge 0$이므로 $x \le 0$ 또는 $x \ge 1$일 때 $f(x) \ge 0$이고, $0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \le 0$이다. 따라서 $f(0)=0$이고 $f(1)=0$이다.

(3-2) $f(0)=a+c=0$에서 $c=-a$이고, 마찬가지로 $f(1)=ae+1+b+c=0$에서 $b=a-ae-1$이다.

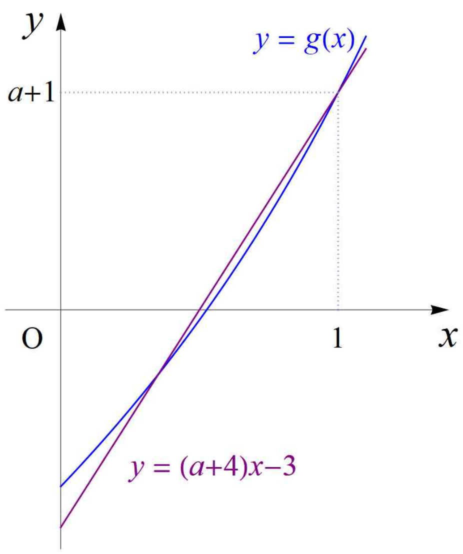
(3-3) $f'(x)=ae^x+2x+a-ae-1$이고 $a>0$이므로 $f''(x)=ae^x+2>0$이다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 $f(0)=f(1)=0$이다. 결국 다음 함수는 조건 (가)를 만족시킨다.

$$f(x)=ae^x+x^2+(a-ae-1)x-a \quad (a>0)$$

그런데 $g(x)=f'(x)=ae^x+2x+a-ae-1$이고 $g'(x)=ae^x+2>0$이므로 $g(x)$는 증가함수이고 $g''(x)=ae^x>0$이므로 $g(x)$는 아래로 볼록하다. 또한 직선 $y=(a+4)x-3$은 기울기가 $a+4$이고 점 $(1, a+1)$을 지나는데 $g(1)=a+1$이므로 곡선 $y=g(x)$는 $x=1$일 때 직선 $y=(a+4)x-3$과 만난다. 그러므로 조건 (나)를 만족시키도록 직선과 곡선의 위치 관계를 생각하면

$$g'(1)>a+4 \text{ 이고 } g(0)>-3$$

이어야 한다. (아래 그림참조)



우선 $g'(1)>a+4$를 계산하면 다음을 얻는다.

$$a>\frac{2}{e-1}$$

또한 $g(0)>-3$을 계산하면 다음을 얻는다.

$$a<\frac{2}{e-2}$$

결국 문제의 모든 조건을 만족시키는 실수 a 값의 범위는 다음과 같다.

$$\frac{2}{e-1} < a < \frac{2}{e-2}$$

(3-4) $g(x) = f'(x) = ae^x + 2x + a - ae - 1$, $g'(x) = ae^x + 2$, $g(1) = a + 1$, $g'(1) = ae + 2$ 이므로 $x = 1$에서 곡선 $y = g(x)$에 대한 접선의 방정식은 $y = (ae+2)(x-1) + a + 1$, 즉

$$y = (ae+2)x + a - ae - 1$$

이다. 따라서

$$k = a - ae - 1 \text{ 이고 } \frac{4-4e}{k+1} = \frac{4(1-e)}{a(1-e)} = \frac{4}{a}$$

이다. 문제 (3-3)의 결과로부터

$$1.4 < 2(e-2) < \frac{4}{a} < 2(e-1) < 3.6$$

이므로 $\frac{4}{a}$의 값으로 가능한 자연수는 2 또는 3이고, 이 때 $a = 2$ 또는 $a = \frac{4}{3}$이다.