2018학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 기출문제지(자연계열 A형)

[문제 1] 어떤 버스정류장에서 A대학교로 가는 B버스가 있다. 날씨가 맑을 때, 버스정류장에서 B버스를 기다리는 시간의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같다. (단, 시간의 단위는 분이다.)

$$f(x)=\frac{1}{30} \quad (0 \le x \le 30)$$

한편 날씨가 맑지 않을 때, 버스정류장에서 B버스를 기다리는 시간의 확률밀도함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\frac{1}{60} \quad (0 \le x \le 60)$$

일기예보에 의하면 날씨가 맑을 확률이 0.8, 맑지 않을 확률이 0.2이다. 수업에 지각하지 않기 위해서는 날씨에 관계없이 늦어도 오전 8시 15분에 버스를 타야한다.

(1-1) 어떤 학생이 오전 8시에 버스정류장에 도착한다고 가정하자. 이 학생이 지각하지 않을 확률을 구하시오. (60점)

(1-2) 어떤 학생이 오전 8시에 버스정류장에 도착하여 지각하지 않을 때, 날씨가 맑을 확률을 구하시오. (60점)

(1-3) 지각하지 않을 확률이 0.6 이상 되기 위해서는 버스정류장에 늦어도 몇 시 몇 분에 도착하여야 하는지 구하시오. (60점)

[문제 2] 좌표공간에 원점 $\mathrm{O}(0,0,0)$ 과 점 $\mathrm{A}(1,-1,2)$ 가 있다. 점 P는 아래의 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P에서 직선 $x-1=y+1=\dfrac{z-2}{2}$ 에 내린 수선의 발 H는 $(2,0,4)$ 이다.
(나) $\left\vert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right\vert \le 5$ 이고 $\left\vert\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right\vert \ge 1$ 이다.

(2-1) A와 P 사이의 거리의 최솟값을 구하시오. (60점)

(2-2) $\left\vert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right\vert$ 가 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하시오. (60점)

(2-3) $\left\vert\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\vert$ 가 최대가 되는 점 P의 x 좌표의 값을 구하시오. (60점)

[문제 3] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-xe^{x^2}}{x-1} & (x\neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$$

라 정의하자. $F'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(3-1) $f(1)$의 값을 구하시오. (60점)

(3-2) <u>미분계수의 정의</u>를 이용하여 $f'(1)$을 a에 관한 식으로 나타내시오. (60점)

(3-3) $g(x)=f'(x)$라 하자. $F'(1)=3$ 일 때, <u>미분계수의 정의</u>를 이용하여 $g'(1)$을 구하시오. (60점)

(3-4) 모든 실수 x에 대하여 $xF(1-x)+(1-x)F(x)=0$일 때, $\int_0^1 f(x)\,dx$를 구하시오. (60점)

2018학년도 세종대학교 수시모집

논술고사 출제기준표(자연계열 A형)

1번 문항 출제 의도

배반인 사건들에 대한 확률의 덧셈정리, 조건부 확률의 개념, 확률의 곱셈정리를 이해하고 연속확률변수의 확률밀도함수를 이용하여 확률을 계산할 수 있는 지를 평가한다.

1번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2016	63-76,104-107
	확률과 통계	김창동 외	교학사	2016	85-97,132-134

2번 문항 출제 의도

직선과 평면의 방정식, 정사영의 개념을 이해하고 점들 사이의 거리를 계산할 수 있는 지를 평가한다.

2번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2016	199-212
	기하와 벡터	신항균 외	지학사	2015	178-190

3번 문항 출제 의도

미분계수의 정의를 이해하고 치환적분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는 지를 평가한다.

3번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 I	이준열 외	천재교육	2016	104-107
	미적분 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2016	141-144

2018학년도 세종대학교 수시모집

논술고사 채점기준표(자연계열 A형)

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	• 날씨가 맑을 때와 맑지 않을 때로 나누어 계산을 하여 $P(O\|G)=0.5$와 $P(O\|G^c)=0.25$를 구하면 (+30점, 각각 15점) • 최종적으로 $P(O)=P(O\cap G)+P(O\cap G^c)$ $(=P(G)P(O\|G)+P(G^c)P(O\|G^c))$ $=0.45$ 를 구하면 (+30점)	60
1-2	• $P(G\cap O)(=P(G)P(O\|G))=0.4$를 구하면 (+30점) • $P(G\|O)=\dfrac{P(G\cap O)}{P(O)}\left(=\dfrac{P(G)P(O\|G)}{P(O)}\right)=\dfrac{0.4}{0.45}=\dfrac{8}{9}$을 구하면 (+30점)	60
1-3	• 관계식 $P(O)=\dfrac{3}{100}y\geq 0.6$ 을 구하고 답 7시55분을 구하면 (60점) • 관계식 $P(O)=\dfrac{3}{100}y\geq 0.6$ 을 구하고 답이 틀리면 (40점)	60

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	• $\lvert\overline{\mathrm{AH}}\rvert=\sqrt{6}$을 구하면 (+30점) • 최종적으로 답 $\sqrt{7}$을 구하면 (+30점)	60
2-2	• $k(1,1,2)$ 형태를 이용하여 답 $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{10}{3}\right)$을 구하면 (60점) • $k(1,1,2)$ 형태를 이용하였지만 답을 구하지 못하면 (30점)	60
2-3	• $k\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ 형태를 이용하여 최종적으로 답 $\dfrac{5}{3}-\dfrac{\sqrt{10}}{6}$을 구하면 (60점) • $k\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ 형태를 이용하였지만 답을 구하지 못하면 (30점)	60

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	(1안) • 극한 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - xe^{x^2}}{x-1}$이 존재함을 이용하여 답 $f(1) = e$를 구하면 (60점) (2안) • $f(x) = (x-1)F(x) + xe^{x^2}$을 이용하여 $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = e$를 구하면 (60점)	60
3-2	• 미분계수의 정의를 이용하여 $f'(1) = \lim_{x \to 1} F(x) + \lim_{x \to 1} \frac{xe^{x^2} - e}{x-1}$ 를 얻으면 (+30점) • 답 $a + 3e$까지 올바르게 계산하면 (+30점)	60
3-3	• 미분계수의 정의를 이용하여 $\lim_{x \to 1} \left(\frac{F(x) - F(1)}{x-1} + F'(x) + \frac{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} - 3e}{x-1} \right)$까지 얻으면 (+30점) • 최종적으로 답 $6 + 10e$를 올바로 구하면 (+30점)	60
3-4	• $\int_0^1 (x-1)F(x)dx = 0$을 보이면 (+30점) • 답 $\frac{1}{2}(e-1)$을 구하면 (+30점)	60

2018학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 답안 예시(자연계열 A형)

[문제 1]

(1-1)
표본공간을 S, 지각하지 않을 사건을 O, 날씨가 맑을 사건을 G라고 하자. 날씨가 맑지 않을 사건은 G의 여사건 G^c이다.
일기예보에 의하면 $P(G)=0.8$이고 $P(G^c)=1-P(G)=0.2$이다.
오전 8시에 버스정류장에 도착하면, 버스를 기다리는 시간이 15분 이하이어야 지각하지 않는다. 따라서 날씨가 맑을 때, 지각하지 않을 확률 $P(O|G)$와 날씨가 맑지 않을 때, 지각하지 않을 확률 $P(O|G^c)$은 각 확률밀도함수를 적분하여 다음과 같이 계산된다.

$$P(O|G)=\int_0^{15}\frac{1}{30}\,dx=0.5,\qquad P(O|G^c)=\int_0^{15}\frac{1}{60}\,dx=0.25$$

한편 표본공간 S는 서로 배반인 사건 G와 G^c의 합집합 $(S=G\cup G^c)$이므로, 사건 O를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$O=O\cap S=O\cap(G\cup G^c)=(O\cap G)\cup(O\cap G^c)$$

사건 G와 G^c이 서로 배반이므로, 사건 $(O\cap G)(\subset G)$와 $(O\cap G^c)(\subset G^c)$는 서로 배반이다. 그러므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(O)=P((O\cap G)\cup(O\cap G^c))=P(O\cap G)+P(O\cap G^c)$$

이다.
확률의 곱셈정리에 의하여 $P(O\cap G)=P(G)P(O|G)$이고 $P(O\cap G^c)=P(G^c)P(O|G^c)$이다.
최종적으로 지각하지 않을 확률 $P(O)$은 다음과 같다.

$$P(O)=P(G)P(O|G)+P(G^c)P(O|G^c)=0.8\times0.5+0.2\times0.25=0.45$$

(1-2)
오전 8시에 버스정류장에 도착하여 지각하지 않을 때, 날씨가 맑을 확률 $P(G|O)$는 조건부확률의 정의에 의해 $P(G|O)=\dfrac{P(G\cap O)}{P(O)}$이다. 확률의 곱셈정리에 의하여 $P(G\cap O)=P(G)P(O|G)=0.8\times0.5=0.4$이고 확률 $P(O)$는 (1-1)에 의해 0.45이므로 확률 $P(G|O)$는 다음과 같다.

$$P(G|O)=\frac{P(G)P(O|G)}{P(O)}=\frac{0.4}{0.45}=\frac{8}{9}$$

(1-3)
버스정류장에 도착한 시간부터 8시 15분까지의 시간을 $y(\geq 0)$라 하자. 버스를 기다리는 시간이 y 이하이면 지각하지 않는다. 따라서

$$P(O|G)=\int_0^{y}\frac{1}{30}\,dx=\frac{y}{30}\ \text{ 이고 }\ P(O|G^c)=\int_0^{y}\frac{1}{60}\,dx=\frac{y}{60}$$

이다. (1-1)에서 사용한 계산방법을 이용하면, 지각하지 않을 확률 $P(O)$는 다음과 같다.

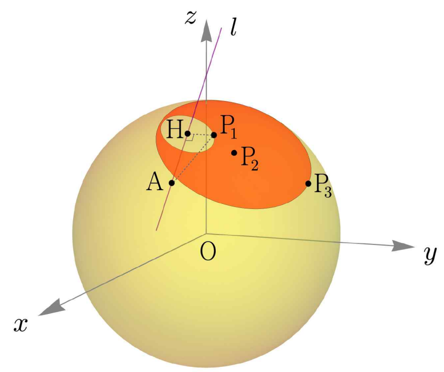
$$P(O)=P(G)P(O|G)+P(G^c)P(O|G^c)=0.8\times\frac{y}{30}+0.2\times\frac{y}{60}=\frac{3}{100}y$$

$P(O)=\frac{3}{100}y \ge 0.6$이어야 하므로 $y\ge 20$ 이다.

따라서 늦어도 오전 8시 15분의 20분 전인 오전 7시 55분에 도착하여야 한다.

[문제 2]

(2-1)



위 그림과 같이 문제에서 주어진 직선을 l이라하고 문제의 조건으로부터 반지름이 5인 노란색 구를 생각하자. 또한 l에 수직이고 H를 포함하는 평면이 구의 내부와 만나는 부분 중에서 H로부터 거리가 1이상인 영역을 주황색으로 나타내자. 위 그림에서와 같이 주황색 영역 위에 있는 점 중에서 H로 부터의 거리가 1인 점 $\mathrm{P_1}$을 택하면 $\overline{\mathrm{AP_1}}$이 A와 P 사이의 거리의 최솟값이다.

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{6}$이고 $\overline{\mathrm{HP_1}}=1$이므로 피타고라스 정리에 의하여 답은 $\sqrt{6+1}=\sqrt{7}$이다.

(2-2) 위 그림에서와 같이 $\mathrm{P_2}$가 주황색 원의 중심일 때, $\overline{\mathrm{OP_2}}$ 가 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최솟값이다.

평면의 방정식 $x+y+2z-10=0$ 이므로 원점과의 거리는 $\frac{10}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$이다.

$(1,1,2)$가 평면에 수직인 벡터이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}\frac{(1,1,2)}{\sqrt{6}}=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$ 이고 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$이다.

(2-3) 위 그림에서와 같이 H와 $\mathrm{P_2}$를 지나는 직선이 주황색 원과 만나는 점을 $\mathrm{P_3}$이라 하자.

$\mathrm{P}=\mathrm{P_3}$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$가 최대가 된다. $\overrightarrow{\mathrm{HP_2}}=\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right)$와 $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}$이 평행하므로

$\overline{\mathrm{OP_2}}$와 $\overline{\mathrm{OP_3}}$의 길이를 이용하면 원의 반지름 $\overline{\mathrm{P_2P_3}}$이 $\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_3} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} + \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} + \frac{\sqrt{10}}{2}\overrightarrow{\mathrm{HP}_2}$이므로 답은 $\frac{5}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6}\left(= \frac{10-\sqrt{10}}{6}\right)$이다.

[문제 3]

(3-1)

(1안) $F(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{x\to1} F(x) = F(1) = a$이다. 즉 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-xe^{x^2}}{x-1} = a$인데

$\lim_{x\to1}(x-1) = 0$이므로 $\lim_{x\to1}(f(x)-xe^{x^2}) = 0$이다. $f(x)$가 연속함수이므로 $f(1) = e$이다.

(2안) $x \neq 1$일 때 $f(x) = (x-1)F(x) + xe^{x^2}$이다. $F(x)$와 $f(x)$가 연속함수이므로

$f(1) = \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\left\{(x-1)F(x) + xe^{x^2}\right\} = e$이다.

(3-2) (1안)

$f(x) = (x-1)F(x) + xe^{x^2}$이다.

$$f'(1) = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)F(x)+xe^{x^2}-e}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)F(x)}{x-1} + \lim_{x\to1}\frac{xe^{x^2}-e}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}F(x) + \lim_{x\to1}\frac{xe^{x^2}-e}{x-1} = a+3e$$

(2안)

$$a = \lim_{x\to1}F(x) = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-xe^{x^2}}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)+f(1)-xe^{x^2}}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{x\to1}\frac{xe^{x^2}-e}{x-1}$$

$$= f'(1) - 3e$$

이므로 $f'(1) = a+3e$이다.

(참고) $\lim_{x\to1}\frac{xe^{x^2}-e}{x-1}$의 계산 :

$h(x) = xe^{x^2}$라 하면 $\lim_{x\to1}\frac{xe^{x^2}-e}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'(1)$이다.

그런데 $h'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$이므로 $h'(1) = 3e$이다.

(3-3)

$$g'(1) = \lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{F(x)+(x-1)F'(x)+e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-(a+3e)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{F(x)-F(1)}{x-1} + F'(x) + \frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-3e}{x-1}\right) = F'(1) + F'(1) + 10e = 6 + 10e$$

(참고) $\lim_{x\to1}\frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-3e}{x-1}$의 계산 :

$h(x)=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$라 하면 $\lim_{x\to1}\dfrac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-3e}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)=10e$이다.

(3-4) 주어진 문제의 조건을 이용하면 $\int_0^1 (x-1)F(x)dx=\int_0^1 xF(1-x)dx$가 된다.

$u=1-x$로 치환하면 $\int_0^1 xF(1-x)dx=\int_1^0 (1-u)F(u)(-du)=-\int_0^1 (u-1)F(u)du$를

얻는다. 따라서 $\int_0^1 (x-1)F(x)dx=0$이다. 그러므로

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \left\{(x-1)F(x)+xe^{x^2}\right\}dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$이다.