세종대학교 2018학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

[문제 1]

(1-1) **풀이** : $\int_{-1}^{-1} g(t)\,dt = 0 = \frac{2f(-1)}{1+f(-1)}$ 이므로 $f(-1)=0$ 이다.

$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = 1 = \frac{2f(1)}{1+f(1)}$ 이므로 $f(1)=1$ 이다.

정답 : $f(-1)=0,\ f(1)=1$

(1-2) **풀이** : 위에서 얻은 결과 $f(-1)=0,\ f(1)=1$ 과 $c=\frac{1}{2}$ 을 연립하면

$$ae-b+c=0,\ \frac{a}{e}+b+c=1,\ c=\frac{1}{2}$$

로부터 $a=0,\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{2}$ 을 구할 수 있으므로 $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)$ 이다.

이때, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ 이므로 $\mathrm{P}\left(-1 \le X \le \frac{1}{2}\right)=\frac{3/2}{1+3/4}=\frac{6}{7}$ 이다.

정답 : $\frac{6}{7}$

(1-3) **풀이** : $f(-1)=0,\ f(1)=1$ 을 풀면 a,b 를 c 에 관한 식으로 표현할 수 있다. 즉 $ae-b+c=0,\ \frac{a}{e}+b+c=1$ 에서

$$a=\frac{e}{1+e^2}-\frac{2e}{1+e^2}c,\ b=\frac{e^2}{1+e^2}-\frac{e^2-1}{1+e^2}c$$

를 구할 수 있다.

그런데 $g(x)$ 가 확률밀도함수이므로 $\frac{d}{dx}\frac{2f(x)}{1+f(x)} \ge 0$ 이 되어야 한다.

따라서 $\frac{d}{dx}\frac{2f(x)}{1+f(x)}=\frac{2f'(x)}{(1+f(x))^2} \ge 0$ 으로부터, $-1 \le x \le 1$ 인 모든 x 에 대하여 $f'(x)=-ae^{-x}+b \ge 0$ 이다.

한편, $f''(x)=ae^{-x}$ 로부터 $f'(x)$ 는 a 의 값에 따라 증가함수 또는 감수함수이므로 $f'(x) \ge 0$ 을 만족하기 위해서는 $f'(-1) \ge 0$ 과 $f'(1) \ge 0$ 만 만족하면 된다.

$f'(x)=-ae^{-x}+b=-\left(\frac{e}{1+e^2}-\frac{2e}{1+e^2}c\right)e^{-x}+\frac{e^2}{1+e^2}-\frac{e^2-1}{1+e^2}c$ 이므로,

$f'(-1) \ge 0$ 과 $f'(1) \ge 0$ 을 풀면,

$$f'(-1)=c \ge 0,\ f'(1)=\frac{e^2-1}{e^2+1}-\frac{e^2-3}{e^2+1}c \ge 0$$

이 되고, $0 \le c \le \frac{e^2-1}{e^2-3}$ 을 얻는다.

따라서, c 의 최솟값은 0이고 최댓값은 $\frac{e^2-1}{e^2-3}$ 이다.

정답 : 최솟값 0, 최댓값 $\frac{e^2-1}{e^2-3}$

세종대학교 2018학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

[문제 2]

(2-1) 풀이 : 원 C위의 한 점 X에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 O라 하면 O는 원 C의 중심이다. 선분 AO의 길이를 x, 선분 BO의 길이를 y라 하면

$$x+y=5$$

이고, 삼각형 XAO와 삼각형 XOB가 각각 직각삼각형이 되므로

$$x^2+r^2=5,\quad y^2+r^2=10$$

이다. 이 세 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=3,\ r=1$을 얻는다.

정답 : 1

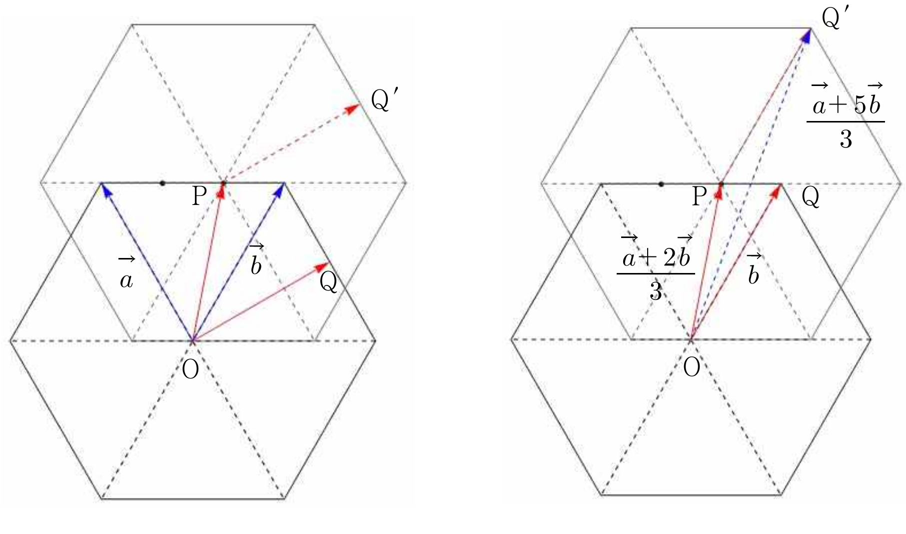
(2-2) 풀이 : $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 는 수직이다. 따라서, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$ 의 최댓값은 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ 가 최대일 때,

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$으로부터 구할 수 있다.

한편, $|\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}|=1$ 이고, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ 가 최대가 되는 것은 $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ 이고 P가 정육각형의 꼭짓점일 때 2 이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$ 의 최댓값은 $\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ 이다.

정답 : $\sqrt{5}$

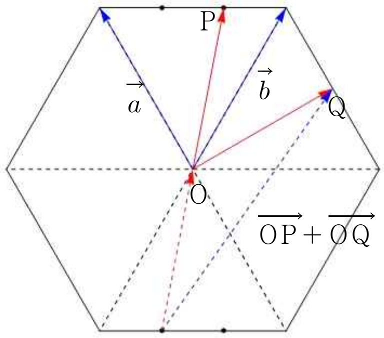
(2-3) 풀이 : (2-2)의 풀이에서처럼 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ 가 최대가 될 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$ 는 최대가 된다. 점 P가 정육각형 H의 한 변 EF를 2:1로 내분하는 점일 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$를 $\vec{a}$, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$를 $\vec{b}$라 하면, 다음 그림에서 보듯이 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$이고, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ 의 최댓값은 $\left|\dfrac{\vec{a}+5\vec{b}}{3}\right|=\dfrac{\sqrt{25+10\vec{a}\cdot\vec{b}+1}}{3}=\dfrac{\sqrt{31}}{3}$이다.

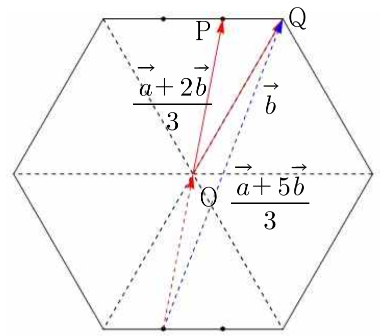


따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$ 의 최댓값은 $\sqrt{1+\dfrac{31}{9}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$이다.

※ 위 그림 대신 다음 그림과 같이 점 Q의 위치를 구할 수도 있다.

세종대학교 2018학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

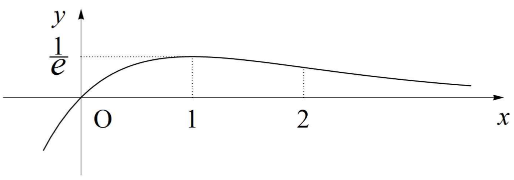




정답 : $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

[문제 3]

(3-1) **풀이**: $h'(x)=(1-x)e^{-x}$, $h''(x)=(x-2)e^{-x}$ 임을 이용하여 $y=h(x)=xe^{-x}$ 의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다. ($x=1$ 일 때 극댓값 $\dfrac{1}{e}$ 을 갖고 $x=2$ 일 때 변곡점 $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$를 갖는다.

정답 : 그래프의 개형 

,

$x=1$ 일 때 극댓값 $\dfrac{1}{e}$, 변곡점의 좌표 $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$

(3-2) **풀이** : 정적분과 미분의 관계를 이용하면

$$g'(x)=f(x)e^{-f(x)}$$

이다. 문제 (3-1)에서 그린 그래프에서 $xe^{-x}=\dfrac{1}{e}$ 을 만족하는 x 는 1뿐이다. 그러므로 $g'(0)=f(0)e^{-f(0)}=\dfrac{1}{e}$ 을 만족하는 $f(0)$ 은 1뿐이다. 즉 $f(0)=1$ 이다.

정답 : $f(0)=1$

(3-3) **풀이** : 문제 (3-2)에 의하여 $f(0)=1$이다. 또한 방정식

$$g''(x)=f'(x)e^{-f(x)}\{1-f(x)\}=0$$

의 실근의 개수가 1이므로 방정식 $f'(x)\{1-f(x)\}=0$ 의 실근의 개수도 1이어야 하는데, $f(0)=1$ 이므로 $x=0$ 이 이 방정식의 실근이다. 또한 $f'(x)$는 3차식이므로 적어도 하나의 실근을 갖는다. 따라서 문제의 조건을 만족하려면 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근이 $x=0$ 이어야 한다. 따라서 다음을 얻는다.

$$f'(x)=4x^3 \text{ 또는 } f'(x)=4x(x^2+bx+c) \text{ (단, } b^2-4c<0\text{)}$$

(첫 번째 경우) $f'(x)=4x^3$ 인 경우에

$$f(x)=x^4+1$$

이고, 이때 방정식 $0=1-f(x)=-x^4$의 해는 $x=0$뿐 이므로 문제의 조건이 모두 성립한다.

(두 번째 경우) $f'(x)=4x(x^2+bx+c)$ (단, $b^2-4c<0$)인 경우

$$f(x)=x^4+\frac{4}{3}bx^3+2cx^2+1 \ (b^2-4c<0)$$

가 되고, $0 \le b^2 < 4c$를 이용하면 $x^2+\dfrac{4b}{3}x+2c>0$이므로

방정식 $0=1-f(x)=-x^2\left(x^2+\dfrac{4b}{3}x+2c\right)$은 $x=0$만을 실근으로 갖는다. 따라서 문제의 조건이 모두 성립한다.

정답 : $f(x)=x^4+1$, $f(x)=x^4+\dfrac{4}{3}bx^3+2cx^2+1 \ (b^2-4c<0)$

(3-4) **풀이** :문제 (3-3)에서 구한 $f(x)$ 각각에 대해 정적분을 구하자.

(i) $f(x)=x^4+1$일 때 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\frac{12}{5}$ 이다.

(ii) $f(x)=x^4+\dfrac{4}{3}bx^3+2cx^2+1\,(b^2-4c<0)$일 때, $c>\dfrac{b^2}{4}\ge 0$이므로 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{1}\left(x^4+\frac{4}{3}bx^3+2cx^2+1\right)dx \\ &= 2\int_{0}^{1}(x^4+2cx^2+1)\,dx \\ &= \frac{12}{5}+\frac{4}{3}c \\ &> \frac{12}{5}\end{aligned}$$

(i)과 (ii)를 종합하면 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$의 최솟값은 $\dfrac{12}{5}$ 이다.

정답 : $\dfrac{12}{5}$