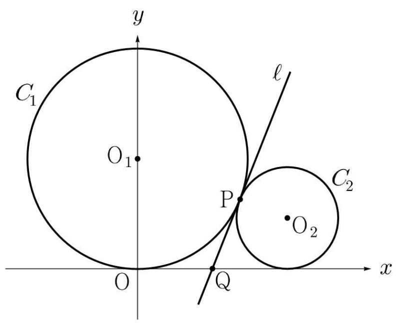
2017학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 기출문제(자연계열 B형)

[문제 1] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

좌표평면에 원 C_1과 C_2가 있다. 시각 t에서 C_1과 C_2의 반지름은 각각 $r_1(t)>0$, $r_2(t)=\dfrac{1}{t^2+1}$이다. 원 C_1의 중심 O_1의 좌표는 $(0, r_1(t))$이고, 원 C_2의 중심 O_2는 제1사분면에 있다. 원 C_2는 원 C_1에 외접하고 x축에 접한다. 함수 $r_1(t)$는 $t\geq 0$에서 연속이며, $t>0$에서 미분가능하고 다음을 만족시킨다.

$$\{r_1(t)\}^2=\int_0^t\left(x-\frac{1}{3}\right)r_1(x)\,dx+\int_0^1 r_1(x)\,dx \quad (t\geq 0)$$



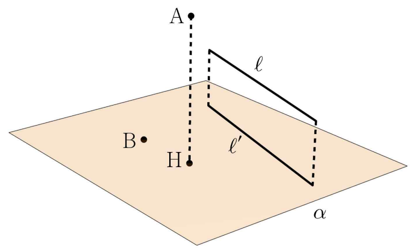
(1-1) 시각 $t=2$에서 원 C_1의 중심 O_1의 속력을 구하시오. (60점)

(1-2) 시각 $t=2$에서 원 C_1의 반지름 $r_1(2)$를 구하시오. (60점)

(1-3) 원 C_1과 C_2의 접점을 P라 하고, 점 P를 지나면서 두 원에 동시에 접하는 직선을 ℓ이라 하고, 직선 ℓ이 x축과 만나는 점을 Q라 하자.
시각 $t=2$에서 점 P의 좌표, 점 Q의 좌표, 점 Q의 속력을 각각 구하시오.
(60점)

[문제 2] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

좌표공간에 점 $\mathrm{A}(4,4,3)$, 직선 $\ell: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-6}{-3}$, 평면 $\alpha: x+2y+2z=9$, α 위의 점 $\mathrm{B}\left(2, \dfrac{3}{2}, 2\right)$가 있다. 평면 α 위의 점 중에서 점 B로부터 거리가 2 이상인 점의 집합을 S라 하자.



(2-1) 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, H의 좌표를 구하시오.
(60점)

(2-2) 집합 S에 속하는 점 Q에 대하여, 선분 AQ의 길이의 최솟값을 구하시오.
(60점)

(2-3) 직선 ℓ의 평면 α 위로의 정사영을 ℓ'이라 할 때, ℓ'은 집합 S에 속함을 보이시오. (60점)

[문제 3] 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $p(x)$, $q(x)$에 대하여 다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1) 함수 $f(x)=ae^{bx}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=2$ (나) $f'(x)=5f(x)$

상수 a와 b의 값을 각각 구하시오. (단, $a\neq 0$, $b\neq 0$이다.) (60점)

(3-2) 함수 $p(x)$와 $q(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $p(x)\geq 0$, $q(x)\geq 0$ (나) $\{p(x)\}^2+\{q(x)\}^2=4$

정적분 $\int_0^1 p(x)q(x)dx$의 최댓값을 구하시오. (60점)

(3-3) 함수 $g(x)$는 다음을 만족시킨다.

(가) $g(x)\geq 0$ (나) $\int_0^2 \{g(x)\}^2dx=6$

정적분 $\int_0^2 g(x)\sqrt{x^3+1}\,dx$ 의 최댓값을 구하시오. (60점)

(3-4) 함수 $h(x)$의 도함수 $h'(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다. 다음 조건을 만족시키는 함수 $h(x)$와 실수 k에 대하여 $h(k)$의 최댓값을 구하시오. (60점)

(가) $h(x)\geq 0$, $h'(x)\geq 0$ (나) $h(0)=2$ (다) $\int_0^k \left(9\{h(x)\}^2+4\{h'(x)\}^2\right)dx=6$

2017학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 출제기준표(자연계열 B형)

1번 문항 출제 의도

미분법과 적분법을 활용하여 평면상에서 움직이는 점들의 위치 및 속력등을 구할 수 있는 지를 평가한다.

1번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	106-108
	기하와 벡터	이강섭 외	미래엔	2016	106-109

2번 문항 출제 의도

정사영을 이해하고 평면과 직선의 방정식 및 위치관계를 구할 수 있는 지를 평가한다.

2번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	125-130
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2016	142-150

3번 문항 출제 의도

절대부등식과 치환적분법을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는 지를 평가한다.

3번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분Ⅱ	황선욱 외	좋은책 신사고	2016	141-144
	수학Ⅱ	김창동 외	교학사	2016	50-52

2017학년도 세종대학교 수시모집

논술고사 채점기준표(자연계열 B형)

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	● $2r_1(t)r'(t)=\left(t-\frac{1}{3}\right)r_1(t)$ 또는 $r'(t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{6}$: 30점 ● $\lvert r_1{}'(2)\rvert = r_1{}'(2)=\frac{5}{6}$: 60점	60
1-2	● $r_1(t)=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{6}t+k$까지: 10점 ● $k^2=k$까지: 50점 ● $r_1(2)=\frac{5}{3}$: 60점	60
1-3	● 점 P $\left(\frac{25\sqrt{3}}{42},\frac{5}{14}\right)$: +20점 ● 점 Q $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$: +20점 ● $\lvert q'(2)\rvert=\frac{\sqrt{3}}{20}$: +20점 ($q'(2)=-\frac{\sqrt{3}}{20}$만 있으면: +10점만)	60

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	● 점 A와 H를 지나는 직선 $x=4+t,\ y=4+2t,\ z=3+2t$: 30점 ● $(3,2,1)$: 60점	60
2-2	● $\overline{\mathrm{AH}}=3$: +20점 ● $\overline{\mathrm{HQ}}=\frac{1}{2}$: +20점 ● $\frac{\sqrt{37}}{2}$: +20점	60
2-3	● ℓ'의 방향벡터가 $(2,2,-3)$의 상수배까지: 20점 ● 점 B와의 거리 $\frac{\sqrt{17}}{2}$까지: 50점 ● 점 B와 직선 ℓ'의 거리 $\frac{\sqrt{17}}{2}>2$: 60점	60

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	● $a=2$: +20점 ● $b=5$: +40점	60
3-2	● $p(x)q(x)\le\frac{\{p(x)\}^2+\{q(x)\}^2}{2}$ 까지: 20점 ● $\int_0^1 p(x)q(x)dx\le 2$까지: 40점 ● $p(x)=q(x)=\sqrt{2}$를 이용하여 최댓값이 2인 것까지: 60점	60
3-3	● $2g(x)\sqrt{x^3+1}\le\{g(x)\}^2+x^3+1$ 까지: 20점 ● $\int_0^2 g(x)\sqrt{x^3+1}\,dx\le 6$ 까지: 40점 ● $g(x)=\sqrt{x^3+1}$ 을 이용하여 최댓값이 6인 것 까지: 60점	60
3-4	● $\int_0^k 12h(x)h'(x)dx\le 6$까지: 15점 ● $\{h(k)\}^2\le 5$까지: 30점 ● $h(x)=2e^{\frac{3}{2}x}$까지: 40점 ● $e^{3k}=\frac{5}{4}$ 또는 $k=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}$ 까지: 50점 ● $h(k)$의 최댓값이 $\sqrt{5}$인 것까지: 60점	60

2017학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 답안 예시(자연계열 B형)

[문제 1]

(1-1) 준식 $r_1(t)^2 = \int_0^t \left(x - \frac{1}{3}\right) r_1(x)\,dx + \int_0^1 r_1(x)\,dx$의 양변을 미분하면

$2r_1(t)r_1{}'(t) = \left(t - \frac{1}{3}\right) r_1(t)$이므로, $r_1{}'(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}$이다. 따라서 $t=2$에서 원 C_1의 중심의 속력은 $|r_1{}'(2)| = r_1{}'(2) = \frac{5}{6}$이다.

(1-2) $r_1{}'(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}$로부터 $r_1(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{6}t + k$이고, 모든 $t \ge 0$에서 $r_1(t) > 0$이므로 $k = r_1(0) > 0$이다. 준식

$r_1(t)^2 = \int_0^t \left(x - \frac{1}{3}\right) r_1(x)\,dx + \int_0^1 r_1(x)\,dx$로부터 $r_1(0)^2 = \int_0^1 r_1(x)\,dx$인데,

$r_1(0) = k$이고 $\int_0^1 r_1(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{6}t + k\right) dx = k$이므로, $k^2 = k$가 된다.

$k > 0$이므로 $k = 1$이다.

따라서 $r_1(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{6}t + 1$이므로 $r_1(2) = \frac{5}{3}$이다.

(1-3) 시각 t에서 원 C_2의 중심O_2의 좌표는

$\mathrm{O}_2 = \left(\sqrt{(r_1(t)+r_2(t))^2 - (r_1(t)-r_2(t))^2},\, r_2(t)\right) = \left(2\sqrt{r_1(t)r_2(t)},\, r_2(t)\right)$이다.

접점 P는 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$를 $r_1(t) : r_2(t)$로 내분하는 점이므로, 점 P의 좌표는

$\left(\frac{r_1 \cdot 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 \cdot 0}{r_1 + r_2},\, \frac{r_1 r_2 + r_2 r_1}{r_1 + r_2}\right) = \left(\frac{2r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2},\, \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right)$이다.

$r_1(2) = \frac{5}{3}$, $r_2(2) = \frac{1}{5}$이므로, $t=2$에서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{25\sqrt{3}}{42},\, \frac{5}{14}\right)$이다.

직선 ℓ은 점 P에서 원 C_1에 접하고, $C_1 : x^2 + (y - r_1)^2 = r_1^2$이므로,

$\mathrm{P}\left(\frac{2r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2},\, \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right) = \mathrm{P}(a, b)$라 할 때, P에서 C_1의 접선의 식은

$\ell : ax + (b - r_1)(y - r_1) = r_1^2$ 이다.

(원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선 공식 $x_1 x + y_1 y = r^2$을 평행 이동하여 얻을 수 있다.)

Q의 좌표를 $(q, 0)$ 이라 하면, $aq + (b - r_1)(0 - r_1) = r_1^2$ 이 되어,

$q(t) = \frac{b}{a} r_1(t) = \sqrt{r_1(t) r_2(t)}$ 이다. 따라서 $t=2$에서 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$이다.

$q'(t) = \frac{r_1{}'(t) r_2(t) + r_1(t) r_2{}'(t)}{2\sqrt{r_1(t) r_2(t)}}$ 이고 $r_1(2) = \frac{5}{3}$, $r_2(2) = \frac{1}{5}$, $r_1{}'(2) = \frac{5}{6}$,

$r_2{}'(2) = -\frac{4}{25}$이므로, $t=2$에서 점 Q의 속력은 $|q'(2)| = -q'(2) = \frac{\sqrt{3}}{20}$이다.

[문제 2]

(2-1) $(1,2,2)$가 평면에 수직인 벡터이므로 점 A와 점 H를 지나는 직선의 방정식은 $x = 4 + t, y = 4 + 2t, z = 3 + 2t$ 이고 이 직선이 평면 α와 만나는 점이 H이므로 $(4+t) + 2(4+2t) + 2(3+2t) = 9$를 만족한다. 따라서 $t = -1$이 되어 점 H의 좌표는 $(3,2,1)$이 된다.

(2-2) $\overline{\mathrm{AQ}}^2 = \overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{HQ}}^2 = 9 + \overline{\mathrm{HQ}}^2$ 이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}$ 최솟값은 $\overline{\mathrm{HQ}}$가 최솟값을 가질 때이고, $\overline{\mathrm{HQ}}$의 최솟값은 B와 H를 지나는 직선이 B를 중심으로 하고 반지름이 2인 원과 만나는 점이 Q일 때이다. 이 때, H와 B간의 거리가 $\frac{3}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{HQ}}$의 최솟값은 $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AQ}}^2$의 최솟값은 $9 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{37}{4}$이다. 답은 $\frac{\sqrt{37}}{2}$이다.

(2-3)

점 B와 직선 ℓ 위의 한 점 $(2t+2, 2t-1, -3t+6)$ 사이의 거리를 d라 하면,

$d^2 = (2t)^2 + (2t - \frac{5}{2})^2 + (-3t+4)^2$ 이고 이 식을 미분하면 $t = 1$일 때 d^2은 최솟값 $\frac{21}{4}$을 가진다. 따라서 점 B와 직선 ℓ 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{21}}{2}$이다. 또한 $(2,2,-3) \cdot (1,2,2) = 0$이므로 직선 ℓ 과 평면 α는 평행하다. 따라서 점 B와 직선 ℓ의 최소거리가 되는 ℓ 위의 점을 T_1, 점 B와 직선 ℓ'의 최소거리가 되는 ℓ' 위의 점을 T_2라 하면 T_2는 T_1을 평면 α에 내린 수선의 발이다. 직선 ℓ 과 평면 α 사이의 거리가 1이므로 피타고라스정리에 의하여 점 B와 직선 ℓ'의 거리는 $\frac{\sqrt{17}}{2} > 2$ 가 되므로 직선 ℓ'은 집합 S에 속한다.

[문제 3]

(3-1) $a = f(0) = 2$ 에서 $a = 2$이다. $f'(x) = ab\,e^{bx} = 5f(x) = 5a\,e^{bx}$에서 $b = 5$ 이다.

(3-2) 산술평균과 기하평균과의 관계를 이용하면

$$p(x)q(x) \le \frac{\{p(x)\}^2 + \{q(x)\}^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

이므로 $p(x)q(x)$ 의 값은 2 이하이다.

(절대부등식 $\{p(x)\}^2 - 2p(x)q(x) + \{q(x)\}^2 = \{p(x) - q(x)\}^2 \ge 0$임을 이용하여 증명해도 된다.)

그러므로 $2 - p(x)q(x) \ge 0$이고

$\int_0^1 2dx - \int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 (2 - p(x)q(x))dx \ge 0$이다.

따라서 $\int_0^1 p(x)q(x)dx \le \int_0^1 2\,dx = 2$인데, $p(x)$와 $q(x)$가 모두 상수함수 $\sqrt{2}$이면, 이 식의 등호가 성립하며, $p(x)$와 $q(x)$는 문제의 조건을 모두 만족시킨다. 따라서 $\int_0^1 p(x)q(x)dx$의 최댓값은 2이다.

(3-3) $0 \le x \le 2$인 임의의 실수 x에 대하여 $\left\{g(x)-\sqrt{x^3+1}\right\}^2 \ge 0$임을 이용하면

$$2\,g(x)\sqrt{x^3+1} \le \{g(x)\}^2 + x^3 + 1 \qquad \cdots\cdots\cdots \ (1)$$

이다. (산술평균과 기하평균과의 관계를 이용해도 식 (1)이 보여진다.) 따라서

$$\begin{aligned} 2\int_0^2 g(x)\sqrt{x^3+1}\,dx &\le \int_0^2 \left(\{g(x)\}^2 + x^3+1\right)dx \qquad \cdots\cdots\cdots \ (2) \\ &= \int_0^2 \{g(x)\}^2dx + \int_0^2 (x^3+1)\,dx \\ &= 6+6 \\ &= 12 \end{aligned}$$

이므로

$$\int_0^2 g(x)\sqrt{x^3+1}\,dx \le 6 \qquad \cdots\cdots\cdots \ (3)$$

이다. 그런데 (1)의 등호는

$$g(x) = \sqrt{x^3+1}$$

일 때 성립하고 이 때 식 (2), (3)의 등호도 모두 성립한다. 또한 함수 $g(x)=\sqrt{x^3+1}$는 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다. 따라서 $\int_0^2 g(x)\sqrt{x^3+1}\,dx$의 최댓값은 6이다.

(3-4) (나)의 식에서 $k>0$임이 분명하다. 또한 임의의 실수 x에 대하여

$12h(x)h'(x) = 2\cdot 3h(x)\cdot 2h'(x) \le \{3h(x)\}^2 + \{2h'(x)\}^2 = 9\{h(x)\}^2 + 4\{h'(x)\}^2$

이므로

$$\int_0^k 12\,h(x)h'(x)dx \le \int_0^k \left(9\{h(x)\}^2 + 4\{h'(x)\}^2\right)dx = 6 \qquad \cdots\cdots\cdots \ (4)$$

이다. (산술-기하 평균을 이용하여 보일 수도 있다.)

이 때, $t=h(x)$로 두고 치환적분법을 이용하여 계산하면

$$\begin{aligned} \int_0^k 12\,h(x)h'(x)dx &= 6\int_0^k 2\,h(x)h'(x)dx \\ &= 6\left\{h(k)^2 - h(0)^2\right\} \\ &= 6\,h(k)^2 - 24 \end{aligned}$$

이므로

$$\{h(k)\}^2 \le \frac{30}{6} = 5 \qquad \cdots\cdots\cdots \ (5)$$

이다. 부등식 (4)의 등호는 $3h(x) = 2h'(x)$일 때, 즉

$$h'(x) = \frac{3}{2}h(x) \qquad \cdots\cdots\cdots \ (6)$$

일 때 성립한다. 조건 (가)에서 $h(0)=2$를 만족해야하므로

$$h(x) = 2e^{\frac{3}{2}x}$$

라 하면 식 (6)이 성립하고, $h(x)$와 $h'(x)$를 식 (다)에 대입하여 $e^{3k} = \frac{5}{4}$를 얻고, 이를 풀어 $k = \frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}$를 얻는다. 이 때, $h(k) = \sqrt{5}$이다. 이 함수 $h(x) = 2e^{\frac{3}{2}x}$와 실수 $k = \frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}$는 문제의 조건을 모두 만족시키므로 $h(k)$의 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.