

2017학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 기출문제(자연계열 A형)

[문제 1] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

좌표평면에 곡선 $C: y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 이 있다. 점 P와 Q는 곡선 C 위에서

시각 t 가 증가할 때 x 좌표가 증가하는 방향으로 움직인다.

시각 $t=0$ 일 때, 점 P와 Q는 다음을 만족시킨다.

(가) 점 P의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.

(나) 점 Q는 제1사분면에 위치한다.

(다) 점 $(0, 1)$ 로부터 Q까지의 C의 길이는 3이다.

(1-1) 곡선 C의 $x=0$ 에서 $x=1$ 까지의 길이를 구하시오. (60점)

(1-2) 시각 $t=0$ 일 때, 점 Q의 좌표를 구하시오. (60점)

(1-3) 점 P와 Q가 시각 t 에서 각각 다음과 같은 속력으로 움직인다.

$$u(t) = 6t^2 - 8t + 14, \quad v(t) = 3t^2 + 4t + 5$$

시간 $t \geq 0$ 에서 점 P와 Q가 만나는 횟수를 구하시오. (60점)

[문제 2] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

어느 공장에서 생산되는 제품의 불량률은 이 제품을 생산하는 기계의 작동상태에 따라 다르다. 이 기계가 정상적으로 작동할 경우 불량률은 0.01이고, 정상적으로 작동하지 않을 경우 불량률은 0.10이라고 한다. 이 기계의 작동상태를 관리하기 위하여 관리자는 기계에 센서를 설치하였다. 이 센서에 빨간 신호가 켜지면 기계의 작동상태가 정상적이지 않다는 것을 나타낸다.

이 기계가 정상적으로 작동하지 않을 경우 센서에 빨간 신호가 켜지는 확률을 p_1 , 기계가 정상적으로 작동하는 경우 센서에 빨간 신호가 켜지지 않는 확률을 p_2 , 센서에 빨간 신호가 켜졌을 때 실제로 이 기계가 정상적으로 작동하고 있지 않을 확률을 p_3 이라 하자. 즉, A 를 이 기계가 정상적으로 작동하지 않을 사건이라고 하고 B 를 이 센서에 빨간 신호가 켜지는 사건이라 할 때,

$p_1 = P(B|A)$, $p_2 = P(B^C|A^C)$, $p_3 = P(A|B)$ 이다.

이 기계가 정상적으로 작동하지 않을 확률 $P(A)$ 는 0.01로 일정하며, 현재 $p_1 = 0.80$, $p_2 = 0.90$ 이라고 한다.

(2-1) 이 기계에서 생산되는 제품 중에서 임의로 한 개를 골랐을 때 이 제품이 불량품일 확률을 구하시오. (60점)

(2-2) 확률 p_3 을 구하시오. (60점)

(2-3) 확률 p_3 은 (2-2)에서 구한 값보다 작아지지 않으면서, p_2 는 낮추고 p_1 을 최대한 높이려고 한다. 확률 p_1 은 0.01 증가할 때마다 100만원씩의 추가 비용이 발생하며, p_2 는 0.01 감소할 때마다 50만원씩의 비용이 절약된다. 추가로 드는 비용이 1500만원을 넘지 않는 범위 내에서 p_1 의 최댓값을 구하시오. (60점)

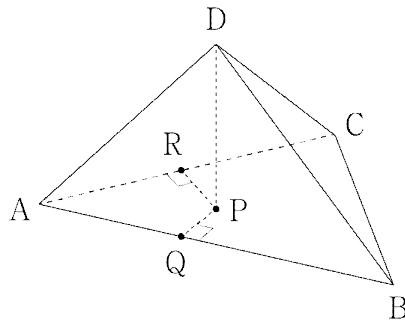
[문제 3] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

그림과 같은 사면체 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=8, \quad \overline{AC}=6, \quad \overline{AD}=3\sqrt{2},$$

$$\cos(\angle DAC)=\frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \cos(\angle CAB)=\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos(\angle DAB)=\alpha$$

이다. 점 D에서 밑면 ABC에 내린 수선의 발을 P, 점 P에서 변 AB에 내린 수선의 발을 Q, 점 P에서 변 AC에 내린 수선의 발을 R라 하자. (단, 점 P는 삼각형 ABC의 내부에 있다.)



(3-1) 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. (60점)

(3-2) 선분 AR의 길이를 구하시오. (60점)

(3-3) 선분 PQ의 길이를 α 의 식으로 나타내시오. (60점)

(3-4) 사면체 ABCD의 부피가 $4\sqrt{15}$ 일 때, α 의 값을 구하시오. (60점)

2017학년도 세종대학교 수시모집 논술고사 출제기준표(자연계열 A형)

1번 문항 출제 의도

미분법과 적분법을 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있는 지를 평가한다.

1번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	109-112
	기하와 벡터	이강섭 외	미래엔	2016	110-113

2번 문항 출제 의도

조건부 확률의 뜻을 이해하고 확률의 곱셈정리를 활용할 수 있는 지를 평가한다.

2번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2016	73-80
	확률과 통계	김창동 외	교학사	2016	93-106

3번 문항 출제 의도

삼수선의 정리와 삼각함수를 활용하여 기하 문제를 해결할 수 있는 지를 평가한다.

3번 문항 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2016	118-125
	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	131-136

2017학년도 세종대학교 수시모집
논술고사 채점기준표(자연계열 A형)

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	<ul style="list-style-type: none"> ● $\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} dt$ 까지: 20점 ● $\int_0^1 \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt$ 까지: 40점 ● $\frac{e - e^{-1}}{2}$: 60점 	60
1-2	<ul style="list-style-type: none"> ● $\int_0^x \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt = \frac{1}{2} \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right)$ 까지: 30점 ● $x = \ln(3 \pm \sqrt{10})$ 까지: 40점 ● $x = \ln(3 + \sqrt{10})$ 까지: 50점 ● $(\ln(3 + \sqrt{10}), \sqrt{10})$: 60점 	60
1-3	<ul style="list-style-type: none"> ● $\int_0^t u(z) dz = 2t^3 - 4t^2 + 14t$: +10점 ● $3 + \int_0^t v(z) dz = t^3 + 2t^2 + 5t + 3$: +10점 ● $t^3 - 6t^2 + 9t - 3 = 0$: +10점 ● $g(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 3$의 그래프의 개형을 이해하여 x 축과 3번 만남을 보이면: +30점 	60

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	<ul style="list-style-type: none"> ● $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap A^c)$ 만 있으면: 10점 ● $P(D) = P(D A)P(A) + P(D A^c)P(A^c)$ 만 있으면: 30점 ● $0.1 \times 0.01 + 0.01 \times 0.99$ 또는 $\frac{10+99}{100+9900}$ 또는 이와 동등한 식만 있으면: 50점 ● $\frac{109}{10000}$ 또는 0.0109: 60점 	60
2-2	<ul style="list-style-type: none"> ● $p_3 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ 만 있으면: 10점 ● $p_3 = \frac{P(B A)P(A)}{P(B A)P(A) + P(B A^c)P(A^c)}$ 만 있으면: 30점 ● $p_3 = \frac{0.8 \times 0.01}{0.8 \times 0.01 + 0.1 \times 0.99}$ 또는 $p_3 = \frac{80}{80+990}$ 또는 이와 동등한 식만 있으면: 50점 ● $p_3 = \frac{8}{107}$: 60점 	60
2-3	<ul style="list-style-type: none"> ● $100x - 50y \leq 15$ 를 얻으면: +15점 ● $\frac{(0.8+x) \times 0.01}{(0.8+x) \times 0.01 + (0.1+y) \times 0.99} \geq \frac{8}{107}$: +15점 ● $y \leq \frac{x}{8}$ 를 얻으면: +10점 ● $x = \frac{4}{25} = 0.16$: +10점 ● $p_1 = 0.8 + 0.16 = \frac{24}{25} = 0.96$: +10점 	60

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	<ul style="list-style-type: none"> ● $\sin(\angle CAB) = \frac{\sqrt{6}}{3}$: 30점 ● ABC의 넓이 $8\sqrt{6}$: 60점 	60
3-2	<ul style="list-style-type: none"> ● 삼수선의 정리를 언급하면: +10점 ● $\overline{AR} = 2\sqrt{3}$: +50점 ● $\overline{AR} = 2\sqrt{3}$를 얻지 못했지만, $\overline{AR} = \overline{AD} \cos(\angle DAC)$식이 있으면: +10점 	60
3-3	<ul style="list-style-type: none"> ● $\overline{AQ} = 3\sqrt{2}\alpha$: +10점 ● $\overline{AS} = 6$ 또는 $\overline{QS} = 6 - 3\sqrt{2}\alpha$: +20점 ● $\overline{RS} = 2\sqrt{6}$: +10점 ● $\overline{PQ} = 3(\sqrt{2} - \alpha)$: 60점 	60
3-4	<ul style="list-style-type: none"> ● $\overline{DP} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$: +10점 ● $(\overline{DP})^2 = 9(2\sqrt{2}\alpha - 3\alpha^2)$: +20점 ● $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{12}$: +10점 ● $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{12}$를 얻고 $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$인 경우 점 P가 삼각형 ABC의 외부에 있다고 언급하고 $\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{12}$을 얻으면: 60점 	60

2017학년도 세종대학교 수시모집 논술고사 답안 예시(자연계열 A형)

[문제 1]

$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 라 하자.

(1-1) $x = 0$ 에서 $x = 1$ 까지의 곡선의 길이는

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} dt = \int_0^1 \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt = \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

이다.

(1-2) $x > 0$ 일 때, 점 $(0, 1)$ 로부터 점 $(x, f(x))$ 까지 곡선의 길이는

$$\int_0^x \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} dt = \int_0^x \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)$$

이다.

$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 3$ 으로부터 $e^{2x} - 6e^x - 1 = 0$ 이므로 $x = \ln(3 + \sqrt{10})$ 이다. 이 때,

$y = f(x)$ 에 대입하면 $y = \sqrt{10}$. 따라서 $t = 0$ 일 때, 점 Q의 좌표는 $(\ln(3 + \sqrt{10}), \sqrt{10})$ 이다.

(1-3) 시각 t 에서 점 $(0, 1)$ 과 점 P 사이의 곡선의

$$\text{길이는 } \int_0^t u(z) dz = 2t^3 - 4t^2 + 14t \text{이다.}$$

시각 t 에서 점 $(0, 1)$ 과 점 Q 사이의 곡선의 길이는

$$3 + \int_0^t v(z) dz = t^3 + 2t^2 + 5t + 3 \text{이다.}$$

$$\int_0^t u(z) dz = 3 + \int_0^t v(z) dz \text{로부터 } t^3 - 6t^2 + 9t - 3 = 0 \text{이다.}$$

$g(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 3$ 라 하면, $g'(t) = 3(t-1)(t-3)$ 이다.

$g(t)$ 는 3차 함수이고 $g(0) = -3, g(1) = 1, g(3) = -3$ 이므로, $t \geq 0$ 에서 점 P와 Q는 3번 만난다.

[문제 2]

(2-1) D를 불량품이 추출될 사건이라고 하면 구하는 확률은 $P(D)$ 이다.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap A^C) \\ &= P(D|A)P(A) + P(D|A^C)P(A^C) \\ &= 0.1 \times 0.01 + 0.01 \times 0.99 = \frac{109}{10000} = 0.0109 \end{aligned}$$

(2-2)

$$\begin{aligned}
 p_3 &= P(A|B) \\
 &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
 &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} \\
 &= \frac{0.8 \times 0.01}{0.8 \times 0.01 + 0.1 \times 0.99} \\
 &= \frac{8}{107} \approx 0.075
 \end{aligned}$$

(2-3)

x 를 p_1 의 증가량이라 하고 y 를 p_2 의 감소량이라고 할 때 다음 두 조건을 만족하는 x 를 구한다.

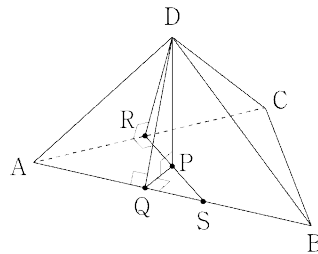
$$100x - 50y \leq 15 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{100\text{만원}}{0.01} \times x - \frac{50\text{만원}}{0.01} \times y \leq 1500\text{만원} \right) \quad \dots\dots (1)$$

$$\frac{(0.8+x) \times 0.01}{(0.8+x) \times 0.01 + (0.1+y) \times 0.99} \geq \frac{8}{107} \quad \dots\dots (2)$$

식 (2)를 풀면 $y \leq \frac{x}{8}$ 이고 이를 식 (1)과 연립하면 $x \leq \frac{4}{25} = 0.16$ 을 만족해야 한다.

따라서 주어진 조건 하에서 최대한 높일 수 있는 p_1 의 값은 $0.8 + 0.16 = 0.96$ 이다.

[문제 3]



(3-1) $\sin(\angle CAB) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle CAB)} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin(\angle CAB) = 8\sqrt{6}$$

(3-2) 삼수선의 정리에 의하여 선분 AR은 선분 DR에 수직이므로 다음을 얻는다.

$$\overline{AR} = \overline{AD} \cos(\angle DAC) = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{3}$$

(3-3) 삼수선의 정리에 의하여 선분 AQ는 선분 DQ에 수직이므로 다음을 얻는다.

$$\overline{AQ} = \overline{AD} \cos(\angle DAB) = 3\sqrt{2} \alpha$$

선분 RP의 연장선이 선분 AB 또는 그 연장선과 만나는 점을 S라 하자.(위 그림 참조) 그러면

$$\overline{AS} = \frac{\overline{AR}}{\cos(\angle CAB)} = 6, \quad \overline{RS} = \sqrt{\overline{AS}^2 - \overline{AR}^2} = 2\sqrt{6}, \quad \overline{QS} = \overline{AS} - \overline{AQ} = 6 - 3\sqrt{2}\alpha$$

이다. (결국 S는 위 그림과 같이 선분 AB 위에 있음을 알 수 있다.) $\triangle ASR$ 와 $\triangle PSQ$ 는 닮은 삼각형이므로 닮음비를 이용하면

$$\overline{PQ} : 6 - 3\sqrt{2}\alpha = 2\sqrt{3} : 2\sqrt{6}$$

에서 $\overline{PQ} = 3(\sqrt{2} - \alpha)$ 이다.

(3-4) 주어진 사면체는 밑면이 $\triangle ABC$ 이고 높이가 \overline{DP} 인 삼각뿔이므로 부피 V 는 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot \overline{DP} = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{6} \cdot \overline{DP}$$

따라서 $V = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{6} \cdot \overline{DP} = 4\sqrt{15}$ 를 풀어 $\overline{DP} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$ 을 얻는다. $\triangle DPQ$ 에

피타고라스 정리를 적용하면

$$(\overline{DP})^2 = (\overline{DQ})^2 - (\overline{PQ})^2 = (\overline{DQ})^2 - 9(\sqrt{2} - \alpha)^2$$

을 얻고, $\triangle DAQ$ 에 피타고라스 정리를 적용하면

$$(\overline{DQ})^2 = (\overline{AD})^2 - (\overline{AQ})^2 = (3\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2}\alpha)^2 = 18(1 - \alpha^2)$$

이다. 따라서

$$(\overline{DP})^2 = (\overline{DQ})^2 - 9(\sqrt{2} - \alpha)^2 = 9(2\sqrt{2}\alpha - 3\alpha^2)$$

이다. 근의 공식을 이용하여 $\left(\frac{3\sqrt{10}}{4}\right)^2 = (\overline{DP})^2 = 9(2\sqrt{2}\alpha - 3\alpha^2)$ 에서 $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는

$\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{12}$ 를 얻는다. 그런데 $\cos(\angle DAB) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 일 때,

$$(\overline{DP})^2 = 9\left(2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\right) = 6 \text{이므로 } \overline{DP} = \sqrt{6} \text{이고,}$$

$\overline{DR} = \overline{AD} \cdot \sin(\angle DAC) = \sqrt{6}$ 이므로 $P = R$ 이다. 그러므로 점 P 가 삼각형 ABC 의

내부에 있기 위하여서는 $\cos(\angle DAB) = \alpha > \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이어야 하고 $\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{12}$ 를 얻는다.