2016학년도 세종대학교

논술고사 기출문제(자연계열)

[문제 1] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

$x \geq 0$에서 연속이고 $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여, $f(0)=0$이고 $x>0$일 때 $f'(x)>0$이다. $y=f(x)$의 역함수의 그래프를 y축의 둘레로 회전시켜 얻은 모양의 용기에 물을 넣고 있다. 시각 t에서 용기에 담긴 물의 높이는 $\sqrt{t}$이다. 또한 시각 t에서 물의 부피를 $V(t)$라 할 때, $V'(t)=aV(t)+b$이고 $V(0)=0,\ V(1)=1,\ V(2)=3$ 이다. (단, a, b는 상수이다.)

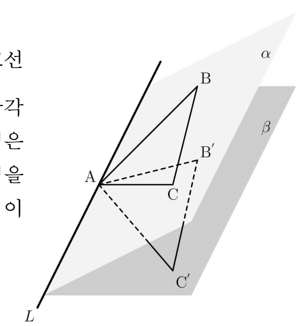
(1-1) $x>0$일 때 $f(x)>0$임을 보이시오. (50점)

(1-2) a와 b를 구하시오. (50점)

(1-3) $f(x)$를 구하시오. (50점)

[문제 2] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

두 평면 α와 β의 이면각을 $\theta\,(0<\theta<\frac{\pi}{2})$, 교선을 L이라 하자. 점 A는 교선 L 위에 있다. 삼각형 ABC는 평면 α 위에 있고 β 위로의 정사영은 정삼각형이다. 점 B와 C의 β 위로의 정사영을 각각 B$'$, C$'$이라 하고, 선분 AB$'$과 교선 L이 이루는 각을 $w\,(0<w<\frac{\pi}{3})$라 하자.



(2-1) 직선 B$'$C$'$과 교선 L이 이루는 예각이 u이고 $\sin w=\frac{1}{3}$일 때, $\sin u$의 값을 구하시오. (50점)

(2-2) 정삼각형 AB$'$C$'$의 한 변의 길이가 2일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2$을 θ와 w로 표현하시오. 또한 $\theta=\frac{\pi}{3}$이고 $w=\frac{\pi}{6}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$를 구하시오. (50점)

(2-3) 정삼각형 AB$'$C$'$의 한 변의 길이가 2일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$을 θ만의 함수 $f(\theta)$로 표현하고 $f(\frac{\pi}{4})$를 구하시오. (50점)

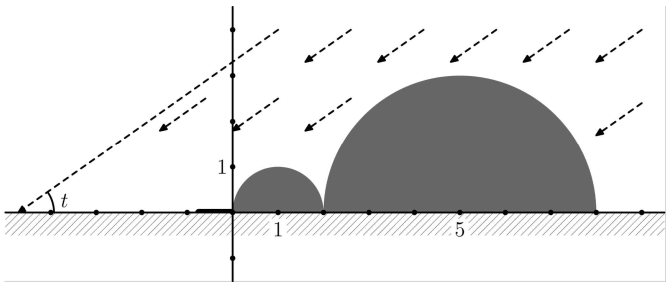
(2-4) 삼각형 ABC의 넓이는 1이고 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=8$일 때, 정삼각형 AB$'C'$의 한 변의 길이를 구하시오. (50점)

[문제 3] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

구간 $[0,8]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-(x-1)^2} & (0\le x\le 2)\\ \sqrt{9-(x-5)^2} & (2<x\le 8)\end{cases}$$

의 그래프와 x축이 둘러 싼 영역에 그림과 같이 빛이 비쳐, x축의 $x\le 0$인 구간에 그림자가 생긴다. 시각 $t\,(0<t<\frac{\pi}{2})$에서 빛이 x축과 이루는 각은 t이다. 시각 t에서 그림자의 길이를 $g(t)$라 하자.



(3-1) $g(\frac{\pi}{4})$의 값을 구하시오. (50점)

(3-2) $0<t<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $g(t)$를 구하고, $g(t)$가 미분가능하지 않은 t의 값을 구하시오. (50점)

(3-3) $s>0$에 대하여 그림자의 길이가 s가 되는 시각을 $h(s)$라 할 때, $h'(4)$를 구하시오. (50점)

2016학년도 세종대학교

논술고사 출제기준표(자연계열)

(1-1)
출제의도: 평균값 정리를 활용하는 능력을 평가
출처: 미적분 I, 지학사, III-2 도함수의 활용, 110~114쪽

(1-2)
출제의도: 부정적분의 치환적분을 활용하는 능력평가
출처: 미적분 II, 교학사, IV-1 부정적분과 정적분, 164~168쪽

(1-3)
출제의도: 미적분의 기본정리 활용능력 평가
출처: 미적분 I, 지학사, IV-1 부정적분과 정적분, 157~159쪽

(2-1)
출제의도: 삼각함수의 덧셈정리 활용능력 평가
출처: 미적분 II, 지학사, II-2 삼각함수의 미분, 81~82쪽

(2-2)
출제의도: 삼수선 정리의 활용능력 평가
출처: 기하와 벡터, 교학사, III-1 공간도형, 133~134쪽

(2-3)
출제의도: 삼각함수의 덧셈정리 활용능력 평가
출처: 미적분 II, 지학사, II-2 삼각함수의 미분, 81~82쪽

(2-4)
출제의도: 정사영의 활용능력 평가
출처: 기하와 벡터, 교학사, III-1 공간도형, 137~140쪽

(3-1)
출제의도: 접선의 방정식을 구하는 연산능력 평가
출처: 미적분 I, 지학사, III-2 도함수의 활용, 107~109쪽

(3-2)
출제의도: 함수의 몫의 미분법을 활용하는 능력평가
출처: 미적분 II, 교학사, III-1 여러 가지 함수의 미분법, 111~113쪽

(3-3)
출제의도: 합성함수의 미분법을 활용하는 능력평가
출처: 미적분 II, 교학사, III-1 여러 가지 함수의 미분법, 116~118쪽

2016학년도 세종대학교

논술고사 채점기준표(자연계열)

(1-1)

- 평균값정리를 써서 증명하면 (50점)
- 평균값정리를 쓰지 않고 “$f(0)=0$이고 증가함수이므로 $f(x)>0$”라고 하면 (40점)
- (1-3)을 먼저 풀고 그 결과를 이용하여 답하면 (0점)

(1-2)

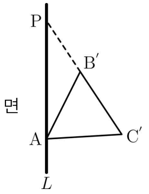
- $V''(t)=aV'(t)$ 또는 $\frac{V''(t)}{V'(t)}=a$까지 쓰면 (15점)
- $V'(t)=Ae^{at}$ 또는 $V(t)=A_1e^{at}+B_1$까지 쓰면 (25점)
- $V(t)=2^t-1$를 구하면 (45점)
- $a,\, b$ 답이 맞으면 (단, $V(t)=2^t-1$가 풀이과정에 나와야 함) (50점)

(1-3)

- 답 $f(x)=\sqrt{\frac{2x\cdot 2^{x^2}\ln 2}{\pi}}$ 을 정확히 쓰면 (풀이과정이 있어야 함) (50점)
- 식 $2^t\ln 2=\pi f(\sqrt{t})^2\frac{1}{2\sqrt{t}}$ 을 얻으면 (풀이과정이 있어야 함) (40점)
- 식 $V(t)=\int_0^{\sqrt{t}}\pi f(y)^2\,dy$ 또는 $2^t-1=\int_0^{\sqrt{t}}\pi f(y)^2\,dy$를 적었으면 (20점)

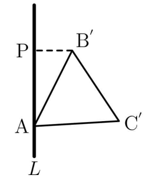
  여기에서 $\sqrt{t}$가 틀리면 (10점) **감점**, $f(y)^2$이 틀리면 (10점) **감점**
- 모든 식에서 π가 빠지면 (5점) **감점**

(2-1)



- $\sin(\frac{\pi}{3}-w)$을 쓰면 (20점)
- $\sin(\frac{\pi}{3}-w)=\sin(\frac{\pi}{3})\cos w-\cos(\frac{\pi}{3})\sin w$를 얻었으나 계산이 틀려 답이 틀리면 (30점)
- 답 $\sin(\frac{\pi}{3}-w)=\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$가 맞으면 계산과정 보지 않고 (50점)

(2-2) (합산하여 채점)



- $\overline{\mathrm{AB}}^2$를 $4\cos^2 w+4\sin^2 w\sec^2\theta$, $4+4\sin^2 w\tan^2\theta$ 또는 이것과 <u>동치인 결과로</u> 표현하면 (35점)
- 위의 식 없이 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{7}$<u>만</u> 구하면 (15점)

(2-3) (합산하여 채점)

- $f(\frac{\pi}{4})=18$이 맞으면 (10점)
- 덧셈정리를 이용하여 w를 소거하고 $f(\theta)=6+6\sec^2\theta$ 또는 $f(\theta)=12+6\tan^2\theta$ 또는 이것과 <u>동치인 결과</u>를 얻으면 (40점)

  여기에서 $f(\theta)$를 얻지 못했지만 $\overline{\mathrm{BC}}^2=4\cos^2(\frac{\pi}{3}-w)+4\sin^2(\frac{\pi}{3}-w)\sec^2\theta$ 또는

  $\overline{\mathrm{CA}}^2=4\cos^2(\frac{\pi}{3}+w)+4\sin^2(\frac{\pi}{3}+w)\sec^2\theta$ 중 하나만 써도 (10점)

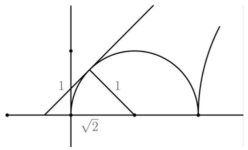
(2-4)

- $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\frac{3d^2}{2}(1+\sec^2\theta)=8$만 기술하면 (15점), $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}\,d^2}{4}$만 기술하면 (25점), 그리고 모두 기술하면 (40점)
- $\frac{3d^2}{2}\left(1+\frac{16}{3d^4}\right)=8$를 풀어 $d^2=4$ 또는 $d^2=\frac{4}{3}$를 얻으면 (45점)
- 결론으로 답 $d=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$를 찾으면 (50점)

(3-1)

• 반지름 1의 반원에 접하는 직선을 그렸거나 세 변의 길이가 $1,1,\sqrt{2}$인 직각삼각형을 그렸으면 (30점)

• 답 $\sqrt{2}-1$을 찾으면 (50점)



(3-2) (합산으로 채점)

• $g(t)=\begin{cases} \dfrac{3}{\sin t}-5 & \left(0<t\le\dfrac{\pi}{6}\right) \\ \dfrac{1}{\sin t}-1 & \left(\dfrac{\pi}{6}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$ 를 기술하면

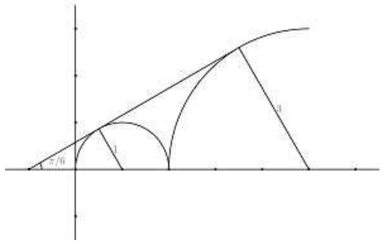
(30점)

함수표현은 맞고 구간이 틀리면 (15점)

•

$\lim_{t\to\pi/6+0}\dfrac{g(t)-1}{t-\pi/6}=-2\sqrt{3}$ 와 $\lim_{t\to\pi/6-0}\dfrac{g(t)-1}{t-\pi/6}=-6\sqrt{3}$

를 계산하고 $t=\dfrac{\pi}{6}$에 미분이 안 된다고 하면 (20점) 증명 없이 $t=\dfrac{\pi}{6}$에서 미분이 안 된다고 하면 (10점)



(3-3)

• 답 $h'(4)=-\dfrac{1}{18\sqrt{2}}$을 찾으면 풀이방법에 상관없이 (50점)

• 답이 틀린 경우 : 다음 두 부분점수의 합산으로 채점

(1) $1=-\dfrac{3\cos h(s)}{\sin^2 h(s)}h'(s)$ 또는 $h'(s)=-\dfrac{\sin^2 h(s)}{3\cos h(s)}$ 을 얻으면 (25점)

(별해)에서는 $1=h'(g(t))\cdot\left(-\dfrac{3\cos t}{\sin^2 t}\right)$을 얻으면 (25점)

(2) $\sin(h(4))=\dfrac{1}{3}$와 $\cos(h(4))=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$를 찾으면 (20점)

2016학년도 세종대학교

논술고사 모범답안(자연계열)

(1-1) $x>0$이면 평균값정리에 의해 $s\in(0,x)$가 있어서 $f(x)=f(x)-f(0)=xf'(s)>0$가 된다.

(1-2) $t>0$이면 $V(t)=\int_0^{\sqrt{t}}\pi f(y)^2dy$로부터 $V'(t)=\pi f(\sqrt{t})^2\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0$를 알 수 있다. $f(t)$가 미분가능하므로 $V'(t)$도 미분가능하다. 그런데 문제의 조건 $V'(t)=aV(t)+b$의 양변을 미분하면 $V''(t)=aV'(t)$가 성립한다. 따라서 $\dfrac{V''(t)}{V'(t)}=a$의 양변을 적분하면 $\ln V'(t)=at+C$가 되어 정리하면 $V'(t)=Ae^{at}$가 된다. 다시 양변을 적분하면 $V(t)=A_1e^{at}+B_1$이 성립한다. $V(t)$가 $t=0$에서 연속함수이므로 $V(0)=A_1+B_1=0$, 즉 $B_1=-A_1$이다. $V(t)=A_1(e^{at}-1)$에서

$$1=V(1)=A_1(e^a-1),\ 3=V(2)=A_1(e^{2a}-1)=A_1(e^a-1)(e^a+1)$$

가 성립하므로 $e^a=2$, $A_1=1$이다. 따라서 $V(t)=2^t-1$이므로 $V'(t)=2^t\ln 2$가 되어 $a=b=\ln 2$이다.

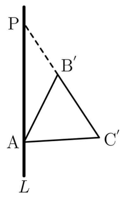
(별해) $V'(t)=aV(t)+b$로부터 예측하여 $V(t)=pe^{dt}+q$라 놓자.
$V(0)=0$이므로 $V(t)=pe^{dt}-p$이 된다.

$$1=V(1)=p(e^d-1),\ 3=V(2)=p(e^{2d}-1)=p(e^d-1)(e^d+1)$$

로부터 $e^d=2$을 얻는다. 따라서 $V(t)=p\cdot 2^t-p$가 되어 $p=1$이다. 따라서 $V'(t)=2^t\ln 2$가 되어 $a=b=\ln 2$이다.

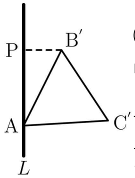
(1-3) (1-2)에서 얻은 결과 $V(t)=2^t-1$를 이용하면 $2^t-1=\int_0^{\sqrt{t}}\pi f(y)^2dy$가 성립하고 양변을 미분하면 $2^t\ln 2=\pi f(\sqrt{t})^2\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$가 된다. $x=\sqrt{t}$로 놓으면 $f(x)^2=\dfrac{2x\cdot 2^{x^2}\ln 2}{\pi}$가 되어 $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x\cdot 2^{x^2}\ln 2}{\pi}}$ 이다.

(2-1) 오른쪽 그림에서 $\angle\mathrm{PAB'}+\angle\mathrm{B'PA}=\angle\mathrm{AB'C'}=\dfrac{\pi}{3}$이므로



$u=\angle\mathrm{B'PA}=\dfrac{\pi}{3}-\angle\mathrm{PAB'}=\dfrac{\pi}{3}-w$**이다.** $\sin w=\dfrac{1}{3}$ **이면** $\cos w=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **이므로**

$\sin(\dfrac{\pi}{3}-w)=\sin(\dfrac{\pi}{3})\cos w-\cos(\dfrac{\pi}{3})\sin w=\dfrac{2\sqrt{6}-1}{6}$ **이다.**



(2-2) 왼쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{AP}}=2\cos w$이고 $\overline{\mathrm{PB'}}=2\sin w$가 된다.

따라서 $\overline{\mathrm{PB}}=2\sin w\sec\theta$가 된다.

또한 $\overline{\mathrm{AB}}^2=(2\cos w)^2+(2\sin w\sec\theta)^2$가 된다. 만약 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이고 $w=\dfrac{\pi}{6}$이면

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(2\cos w)^2+(2\sin w\sec\theta)^2=3+4=7$가 된다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{7}$이 된다.

(2-3) (2-2)의 계산과정을 활용하면 $\overline{\mathrm{AB}}^2=4\cos^2 w+4\sin^2 w\sec^2\theta$,

$\overline{\mathrm{BC}}^2=4\cos^2(\dfrac{\pi}{3}-w)+4\sin^2(\dfrac{\pi}{3}-w)\sec^2\theta$ 그리고

$\overline{\mathrm{CA}}^2=4\cos^2(\dfrac{\pi}{3}+w)+4\sin^2(\dfrac{\pi}{3}+w)\sec^2\theta$가 성립한다. 그런데

$\cos^2 w+\cos^2(\dfrac{\pi}{3}-w)+\cos^2(\dfrac{\pi}{3}+w)=\cos^2 w+(\dfrac{1}{2}\cos w+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin w)^2+(\dfrac{1}{2}\cos w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin w)^2=\dfrac{3}{2}$

가 성립함을 알 수 있다. 더불어 $\sin^2 w+\sin^2(\dfrac{\pi}{3}-w)+\sin^2(\dfrac{\pi}{3}+w)=\dfrac{3}{2}$가 성립한다. 따라서

$f(\theta)=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=6+6\sec^2\theta$가 성립한다. 그러므로 $f(\dfrac{\pi}{4})=18$이다.

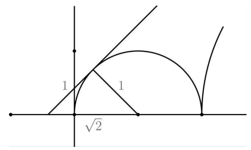
(2-4) (2-3)의 계산과정을 활용하면 $\triangle\mathrm{AB'C'}$의 한 변의 길이를 d라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\dfrac{3d^2}{2}(1+\sec^2\theta)=8$가 된다. $\triangle\mathrm{AB'C'}$의 넓이가 $\dfrac{\sqrt{3}d^2}{4}$이므로 넓이의

정사영에서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}d^2}{4}$가 된다. 즉 $\sec^2\theta=\dfrac{16}{3d^4}$이고 $\dfrac{3d^2}{2}\left(1+\dfrac{16}{3d^4}\right)=8$이 되어 $d^2=4$

또는 $d^2=\dfrac{4}{3}$이 된다. $d^2=\dfrac{4}{3}$가 넓이의 정사영에 맞는 답이으로 $d=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

(3-1) $t=\dfrac{\pi}{4}$일 때, 그림자의 길이는 반지름 1의 반원에 의해서

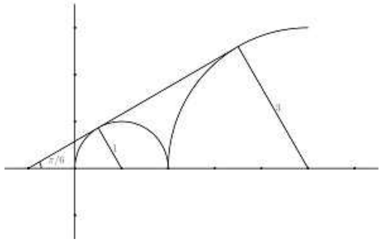


결정된다. x축과 $\dfrac{\pi}{4}$의 각을 이루면서 반지름 1의 반원에 접하는

직선의 x-절편은 $1-\sqrt{2}$이므로 그림자의 길이는

$g(\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}-1$이다.

(3-2) 두 반원에 공통으로 접하는 직선이 x축과



이루는 각은 $t=\dfrac{\pi}{6}$이다. $0<t<\dfrac{\pi}{6}$에서 그림자의

길이는 반지름 3의 반원에 의하여 결정되고,

$\dfrac{\pi}{6}<t<\dfrac{\pi}{2}$에서 그림자의 길이는 반지름 1의

반원에 의하여 결정된다. 따라서 함수 $g(t)$는 다음과

같이 정의된다.

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{\sin t}-5 & (0<t\le\dfrac{\pi}{6})\\[2mm] \dfrac{1}{\sin t}-1 & (\dfrac{\pi}{6}<t<\dfrac{\pi}{2})\end{cases}$$

또한 $t=\dfrac{\pi}{6}$에서 $\displaystyle\lim_{t\to\pi/6+0}\dfrac{g(t)-1}{t-\pi/6}=-2\sqrt{3}$, $\displaystyle\lim_{t\to\pi/6-0}\dfrac{g(t)-1}{t-\pi/6}=-6\sqrt{3}$가 되므로 $t=\dfrac{\pi}{6}$에

미분이 불가능하다.

(3-3) 그림자의 길이는 t가 커질수록 짧아지며, $t=\dfrac{\pi}{6}$일 때 그림자의 길이는 1이다. 따라서

$s\ge1$에 대하여 $s=g(h(s))=\dfrac{3}{\sin h(s)}-5$가 성립한다. 양변을 s로 미분하면 다음을 얻는다.

$$1=-\dfrac{3\cos h(s)}{\sin^2 h(s)}h'(s).$$

이제 $4=\dfrac{3}{\sin(h(4))}-5$ 에서 $\sin(h(4))=\dfrac{1}{3}$이고 $\cos(h(4))=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이므로

$h'(4)=-\dfrac{1}{18\sqrt{2}}$이다.

(별해) 항등식 $t=h(g(t))$을 사용하여 풀어도 같은 결과를 얻는다.

양변을 미분하여 $1=h'(g(t))g'(t)=h'(g(t))\cdot\left(-\dfrac{3\cos t}{\sin^2 t}\right)$을 얻는다.

$4=g(t)=\dfrac{3}{\sin t}-5$로부터 $\sin t=\dfrac{1}{3}$와 $\cos t=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$가 되어 답은 $h'(4)=-\dfrac{1}{18\sqrt{2}}$이다.