세종대학교 2016학년도 모의논술고사
자연계열 모범 답안지

[문제 1]

(1-1) 구 S의 방정식 $x^2+y^2+(z-\sqrt{3})^2=4$에 $z=2\sqrt{3}$을 대입하면 원의 방정식 $x^2+y^2=1$을 얻는다. 따라서 $r=1$이다. 또한 주어진 구와 원기둥을 평면 $x=0$으로 자른 단면을 생각하면 그림 1을 얻는다.

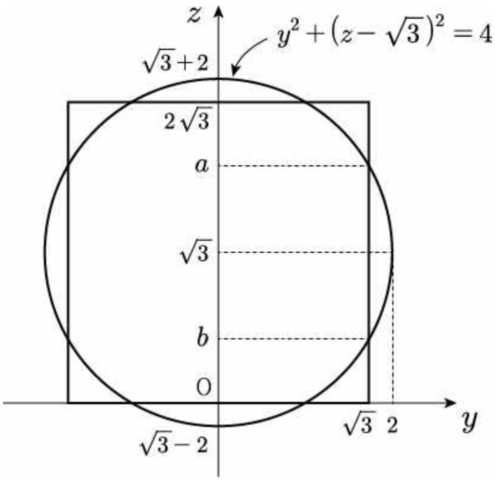

그림 1: 구와 원기둥을 평면 $x=0$으로 자른 단면

$y=\sqrt{3}$을 원의 방정식 $y^2+(z-\sqrt{3})^2=4$에 대입하여 z를 구하면

$$z=\sqrt{3}+1=a$$

이다. 참고로 $b=\sqrt{3}-1$임을 같은 방법으로 알 수 있다.

(1-2) $\sqrt{3}+1\le k\le 2\sqrt{3}$일 때 평면 $z=k$가 구 A와 만나 이루어지는 원의 반지름은 그림 1에서 점 $(0,k)$와 원 위의 점 (y,k) 사이의 거리이므로 다음을 얻는다.

$$S(k)=\pi y^2=\pi\left\{4-(k-\sqrt{3})^2\right\}=\pi(1+2\sqrt{3}k-k^2)$$

(1-3) $\sqrt{3}-1\le z\le\sqrt{3}+1$인 부분의 원기둥의 부피는 6π이고, 대칭성과 $S(k)$의 식을 이용하여 공통 영역의 부피 V를 계산하면 다음과 같다.

$$V=6\pi+2\int_{\sqrt{3}+1}^{2\sqrt{3}}S(z)\,dz=6\pi+\int_{\sqrt{3}+1}^{2\sqrt{3}}\pi\left\{4-(z-\sqrt{3})^2\right\}dz=\left(3\sqrt{3}-\frac{7}{3}\right)\pi$$

세종대학교 2016학년도 모의논술고사
자연계열 모범 답안지

[문제 2]

(2-1) 지점 A 에서 오른쪽 수평 방향으로 $z\,\mathrm{m}(z \ge 0)$를 달리고 그 위치부터 지점 P 까지 곧게 수영을 하는 경우, 걸리는 총 시간(단위: 초)을 $f(z)$라 하면

$$f(z)=\frac{z}{2}+\sqrt{(80-z)^2+(10\sqrt{3})^2}\ \ (0 \le z \le 80)$$

이 된다. 함수 $f(z)$의 도함수를 계산하면

$$f'(z)=\frac{1}{2}-\frac{80-z}{\sqrt{(80-z)^2+(10\sqrt{3})^2}}$$

이며, $0 \le z \le 80$일 때

$$\begin{aligned} f'(z)=0 &\Leftrightarrow 2(80-z)=\sqrt{(80-z)^2+300} \\ &\Leftrightarrow 4(80-z)^2=(80-z)^2+300 \\ &\Leftrightarrow 3(80-z)^2=300 \\ &\Leftrightarrow z=70 \end{aligned}$$

이고 $0 \le z < 70$일 때 $f'(z)<0$이고 $70<z\le 80$일 때 $f'(z)>0$이므로 $z=70$일 때 함수 f는 최솟값 $f(70)=55$를 갖는다. 따라서 최소 시간은 55초이다.

(2-2) 같은 방법으로 $f(z)=\frac{z}{2}+\sqrt{(x-z)^2+y^2}\ \ (0 \le z \le x,\ y \ge 0)$의 도함수를 계산하면

$$f'(z)=\frac{1}{2}-\frac{x-z}{\sqrt{(x-z)^2+y^2}}$$

이며, $0 \le z \le x$이고 $y \ge 0$일 때

$$\begin{aligned} f'(z)=0 &\Leftrightarrow 2(x-z)=\sqrt{(x-z)^2+y^2} \\ &\Leftrightarrow 4(x-z)^2=(x-z)^2+y^2 \\ &\Leftrightarrow 3(x-z)^2=y^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3}(x-z)=y \\ &\Leftrightarrow z=x-\frac{y}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

이다. 또한 $0 \le z < x-\frac{y}{\sqrt{3}}$일 때 $f'(z)<0$이고 $\frac{y}{\sqrt{3}}<z\le x$일 때 $f'(z)>0$이므로 $z=x-\frac{y}{\sqrt{3}}$일 때 함수 f는 최솟값을 갖는다. 이 식에 $z=50$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$y=\sqrt{3}(x-50)\ \ (x \ge 50)$$

(2-3) (2-2)번 문제의 풀이에서, 우선 지점 A 에서 오른쪽 수평 방향으로 $z\,\mathrm{m}(z>0)$를 달리고 그 위치부터 지점 P 까지 곧게 수영을 하는 경우를 생각해 보자. 식

$$\frac{z}{2}+\sqrt{(x-z)^2+y^2}=60\ (0<z\le x)$$

에 $y=\sqrt{3}(x-z)$를 대입하여 정리하면 $\frac{z}{2}+2(x-z)=60$이 되고, 결국 $z=\frac{4}{3}x-40\ (x>30)$을 얻는다. 이 결과를 $y=\sqrt{3}(x-z)$에 다시 대입하여 정리하면

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-120)\ (30 < x \le 120) \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

이 된다. 즉, xy평면에서 현재 수상안전원이 원점 O에 위치하고 있다고 할 때, 전체 60초의 시간 중 일부(혹은 전체) 동안 우선 오른쪽 수평 방향(즉, x축 양의 방향)을 따라 z m ($z>0$)를 달리고 나서 나머지 시간 동안 직선 $y=\sqrt{3}(x-z)$를 따라 수영을 하였을 경우 도착하게 되는 지점의 좌표를 (x,y)라 할 때 x와 y가 만족하는 관계식이 식 (1)이다. 따라서 $z>0$인 경우 60초 안에 수상안전원이 도착할 수 있는 영역을 나타내는 식은 다음과 같다. (그림 2 참조)

$$\left\{(x,y) \mid 0 \le y \le -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-120),\ 0 \le y < \sqrt{3}\,x\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

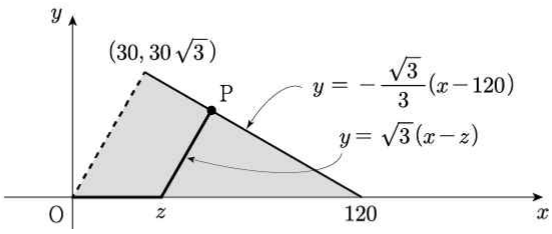

그림 2: $z>0$인 경우 60초 안에 수상안전원이 도착할 수 있는 영역

$z<0$인 경우, 즉, 처음에 수상안전원이 지점 A에서 **왼쪽** 수평 방향으로 z m를 달리고 나서 수영을 하는 경우는 식 (2)가 나타내는 영역과 y축에 대하여 대칭인 영역으로 나타난다.

마지막으로 $z=0$일 때는 육지를 따라 달리지 않고, 바로 수영만 하여 가는 경우이므로 반지름이 60m인 반원 모양의 영역이 되는데, 앞서 구한 영역들과 겹치는 부분을 제외하면 부채꼴 모양으로 나타나게 되며, 이 부채꼴의 중심각은 $\frac{\pi}{3}$가 된다.(그림 3 참조)

따라서 수상 안전원이 60초 안에 도달할 수 있는 바다의 모든 지점들로 이루어진 영역은 그림 3에서 어두운 색으로 표시된 곳이며, 이 영역의 넓이를 계산하면 $3600\sqrt{3}+600\pi$ m^2이다.

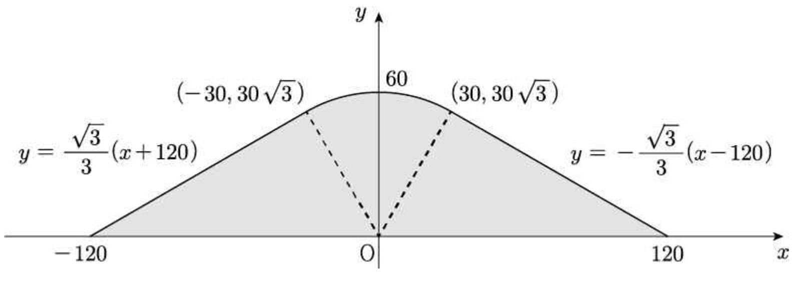

그림 3: 수상 안전원이 60초 안에 도달할 수 있는 바다의 모든 지점들로 이루어진 영역

세종대학교 2016학년도 모의논술고사
자연계열 모범 답안지

[문제 3]

(3-1) S의 중심을 $\mathrm{B}(1,1,1)$이라 두고, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(0,1,0)$과 $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$가 이루는 각을 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|}=\frac{1}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다. 그런데 S의 반지름이 1이므로 다음을 얻는다.

$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q})=1\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

(3-2) 점 A와 점 B를 지나는 직선의 벡터 방정식은

$$(x,y,z)=(1,1,1)+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,1,1)+t(-1,-1,\sqrt{2})$$

이다. 이 식을 구의 방정식 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$에 대입하면 $4t^2=1$인데 이중 양의 근을 구하면 $t=\frac{1}{2}$이다. 이를 다시 직선의 방정식에 대입하면 점 C의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

(3-3) 실의 길이를 최소가 되도록 점 A와 점 C를 실로 연결하는 경우, 이 실을 포함하는 평면 위로 내린 구 S와 실의 정사영은 그림 4가 된다. (점 A와 점 C를 연결하는 실은 초록색으로 표시된 부분이다.)

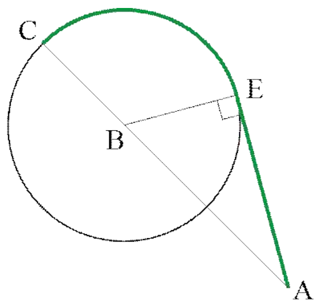

그림 4: 실을 포함하는 평면 위로 내린 구와 실의 정사영

그림 4에서 선분 AE는 원에 접하므로 $\angle\mathrm{AEB}$는 직각이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BE}}=1$이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{3}$이다. 또한 $\angle\mathrm{ABE}=\frac{\pi}{3}$이므로

$$d(\mathrm{C},\mathrm{E})=\angle\mathrm{CBE}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$d(\mathrm{A},\mathrm{C})=\overline{\mathrm{AE}}+d(\mathrm{C},\mathrm{E})=\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi$$

세종대학교 2016학년도 모의논술고사
자연계열 모범 답안지

(3-4) 점 $\mathrm{D}\left(x, y, \frac{3}{2}\right)$를 구 S의 방정식에 대입하면

$$(x-1)^2+(y-1)^2+\frac{1}{4}=1$$

이 되는데, 점 D가 평면 $x=y$ 위에 위치할 때 $d(\mathrm{A},\mathrm{D})$가 최소가 됨을 알 수 있고, 이 때 $x=y=1+\frac{\sqrt{6}}{4}$이며, 점 D의 좌표는 $\left(1+\frac{\sqrt{6}}{4}, 1+\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3}{2}\right)$이다.

이제 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$가 xy평면과 이루는 각을 θ_1이라하자. $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 xy평면 위로의 정사영인 $\vec{u}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$을 이용하면

$$\cos\theta_1=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\vec{u}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

에서 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$이다. 이제 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{1}{2}\right)$이 xy평면과 이루는 각을 θ_2라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$의 xy평면 위로의 정사영인 $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{6}}{4},0\right)$을 이용하면

$$\cos\theta_2=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{BD}}||\vec{v}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

에서 $\theta_2=\frac{\pi}{6}$이다.

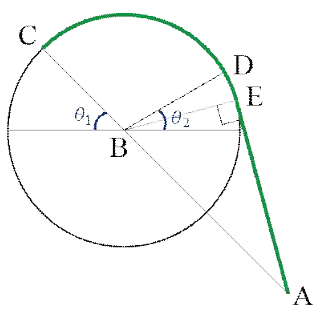

그림 5: 점 A, B, C, D, E의 위치관계

결국 그림 5로부터 $\angle\mathrm{CBD}=\pi-(\theta_1+\theta_2)=\frac{7\pi}{12}$이므로 다음을 얻는다.

$$d(\mathrm{A},\mathrm{D})=\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{C})-\frac{7\pi}{12}=\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi-\frac{7\pi}{12}=\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}$$

[다른 풀이] 위 풀이 중에서, $\angle \mathrm{CBD}$ 의 값은 다음과 같이 직접 계산할 수도 있다: 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{1}{2}\right)$ 의 내적을 이용하면

$$\cos(\angle \mathrm{CBD})=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{BD}}|}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

이다. 그런데 반각공식을 활용하면

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4},\quad \cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

이므로 $\angle \mathrm{CBD}=\frac{7\pi}{12}$ 이다.