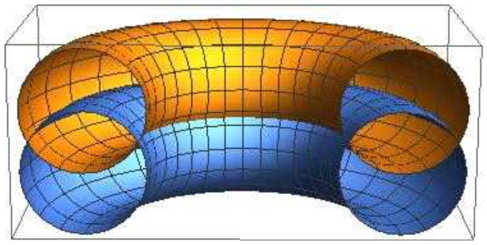
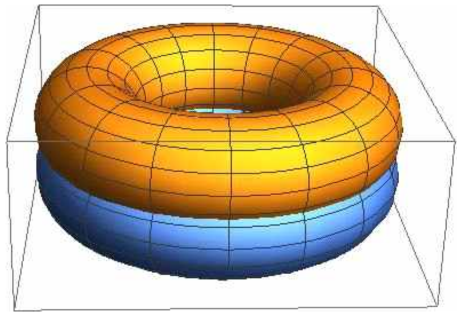
기출 문제 (자연계열 B형)

[문제 1] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

아래 그림과 같이 반지름이 같은 두 원이 서로의 중심을 지나는 단면을 갖도록 튜브를 만들 때, 주입해야 할 공기의 양을 구하고 싶다.





가로와 세로의 길이가 $62\,\mathrm{cm}$이고, 높이가 $18\,\mathrm{cm}$인 직육면체의 상자에 꼭 맞게 들어가도록 튜브를 만들 때, 주입해야 할 공기의 부피(cm^3)를 다음 단계에 따라 구하시오.

(1-1) 문제에서 주어진 튜브의 부피는 교과서에서 배운 회전체의 부피를 이용하여 구할 수 있다. 튜브를 x축에 대한 회전체로 이해할 수 있도록, 튜브의 단면을 좌표평면의 제1사분면에 그리시오. 또, 그려진 두 원의 중심 사이의 거리와 원의 중심에서 x축까지의 최단거리를 구하시오. (10 점)

(1-2) 양의 상수 c에 대해, 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속함수 $f(x)$는 $0 \le f(x) \le c$이다. 두 직선 $x=a,\ x=b$와 두 함수 $y=c+f(x),\ y=c-f(x)$의 그래프로 둘러싸인 영역을 x축 둘레로 회전시킨 입체의 부피를 $\int_a^b f(x)\,dx$를 이용하여 나타내시오. (10 점)

(1-3) (1-1)과 (1-2)의 결과를 이용하여, 튜브에 주입해야 할 공기의 부피를 구하시오. (10 점)

[문제 2] 모든 실수에서 정의된 함수 f 가 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin x$ 라고 하자.

이때, $x_1<x_2$ 인 실수 x_1, x_2 에 대하여 두 점 $(x_1, f(x_1))$ 과 $(x_2, f(x_2))$ 를 지나는 직선의 기울기를 $L(x_1, x_2)$ 로 나타내자. 즉,

$$L(x_1, x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

이다. 주어진 단계에 따라 각 물음에 답하시오.

(2-1) 임의의 실수 c 에 대하여, 방정식 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3}}+c$ 의 해가 오직 한 개임을 보이시오. (10 점)

(2-2) 평균값 정리를 이용하여, $m>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이면 $L(x_1, x_2)=m$ 을 만족하는 x_1, x_2 가 존재하지 않음을 보이시오. (10 점)

(2-3) 중간값 정리를 이용하여, $0<m<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이면 $L(0, x)=m$ 을 만족하는 x가 구간 $(0, \pi)$ 에 존재함을 보이시오. (10 점)

(2-4) 함수 f 의 그래프를 원점을 중심으로 각 θ $\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ 만큼 회전이동 했다고 하자. 이 회전이동으로 얻은 곡선이 어떤 함수의 그래프가 되도록 하는 θ 의 최댓값을 구하시오. (10 점)

[문제 3] 아래 제시문 (가),(나),(다)를 읽고, 이를 이용하여 각 물음에 답하시오.

(가) 500 원, 100 원, 50 원, 10 원짜리 동전이 충분히 많이 있을 때, 동전의 개수를 최소한으로 하여 1370 원을 지불하는 방법은 500 원짜리 동전 2 개, 100 원짜리 동전 3 개, 50 원짜리 동전 1 개, 10 원짜리 동전 2 개를 지불하는 것이다.

(나) $1\,\mathrm{g}, 2\,\mathrm{g}, 2^2\,\mathrm{g}, \cdots, 2^6\,\mathrm{g}$ 짜리 추가 각각 충분히 많이 있을 때, 양팔 저울에 추를 최소한으로 올려 $73\,\mathrm{g}$ 짜리 물체와 평형을 이루게 하는 방법은 $2^6\,\mathrm{g}$ 짜리 1 개, $2^3\,\mathrm{g}$ 짜리 1 개, $1\,\mathrm{g}$ 짜리 1 개를 올리는 것이다.

(다) 어떤 실수 x 를 십진법으로 나타낸 것이 15.401 이라는 것은

$$x = 1\times 10^1 + 5\times 10^0 + 4\times\frac{1}{10^1} + 1\times\frac{1}{10^3}$$

이라는 것을 의미한다.

또, 실수 x 를 십진법으로 나타낸 것이 순환소수 $1.\dot{2}$ 라는 것은

$$x = 1\times 10^0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(2\times\frac{1}{10^k}\right) = 1\times 10^0 + 2\times\frac{1}{10^1} + 2\times\frac{1}{10^2} + 2\times\frac{1}{10^3} + \cdots$$

과 같이 수렴하는 무한급수로 표현된다는 뜻이다.

같은 방법으로 양의 실수 x를 이진법으로 나타낸다는 것은 0 또는 1인 a_i, b_j 에 대해

$$x = \left(a_n\times 2^n + \cdots + a_1\times 2^1 + a_0\times 2^0\right) + \left(b_1\times\frac{1}{2^1} + b_2\times\frac{1}{2^2} + \cdots\right)$$

일 때, $x = a_n \cdots a_1 a_0 . b_1 b_2 b_3 \cdots_{(2)}$ 와 같이 나타내는 것이다. 첨자 $_{(2)}$는 십진법과 구분하여 이진법을 나타내기 위해 표시하는 것이다.

예를 들어, $101.01_{(2)}$ 는 실수 $2^2 + 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{21}{4}$ 을 의미한다.

(3-1) 제시문 (다)를 이용하여 어떤 실수 a 를 이진법으로 나타낸 것이 $0.0\dot{1}_{(2)}$ 이다. 실수 a 를 기약분수로 나타내시오. (10 점)

(3-2) 제시문 (가)와 (나)에서 조건을 만족하는 동전의 개수와 추의 개수를 구하는데 사용된 공통된 생각이 무엇인지 논리적으로 설명하시오. (10 점)

(3-3) 실수 $\frac{1}{3}$ 을 이진법으로 나타내면 순환소수가 된다. 우선, (3-2)의 결과를 바탕으로 이 순환소수를 소수점 아래 네 자리까지 구하시오. 또, $\frac{1}{3}$ 을 이진법으로 나타낸 순환소수를 구하고, 근거를 들어 설명하시오. (10 점)

출제의도 (자연계열 B형)

1. 문항1

ㅁ 평가 형태 :문제 해결 능력 평가
주어진 튜브의 부피를 회전체의 부피 문제로 바꾸어 해결할 수 있는지를 확인하는 문제 해결 능력 평가 문항이다.
ㅁ 평가 요소
: 회전체의 부피를 고등학교에서 배운 정적분을 이용하여 식으로 나타낼 수 있고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 것이 주된 평가 요소이며, 부수적으로 정적분의 성질과 주어진 단계에 따라 논리적으로 사고할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항2

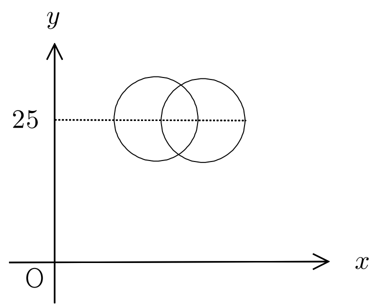
ㅁ 평가 형태 :논리적 사고 능력 평가
주어진 단계에 따라 논리적으로 사고할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
ㅁ 평가 요소
: 주어진 함수의 그래프를 해석할 수 있는지, 연속함수에 대한 중간값 정리, 미분가능한 함수에 대한 평균값 정리를 이해하고 활용할 수 있는지, 주어진 곡선을 함수의 그래프로 이해할 수 있는지를 종합적으로 평가한다.

3. 문항3

ㅁ 평가 형태 : 이해 능력 평가
주어진 제시문을 읽고 이해하여 제시문에서 사용된 공통된 수학적 발견을 할 수 있고, 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
ㅁ 평가 요소
: 이진법 전개, 무한급수가 수렴하는 값에 대한 기본적인 개념을 이해하는지와, 제시문을 읽고 이해하는지를 평가한다.

답안 예시 (자연계열 B형)

- 1-1번 문항



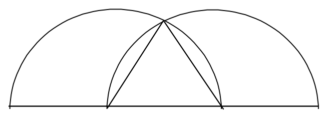
두 원의 중심거리는 6이고 원의 중심에서 x축까지의 최단거리는 25이다.

- 1-2번 문항

회전한 입체의 부피는 $\pi\int_a^b (c+f(x))^2\,dx-\pi\int_a^b (c-f(x))^2\,dx$ 이다. 이것을 계산하면 답은 $4c\pi\int_a^b f(x)\,dx$이다.

- 1-3번 문항

(1-2)의 답에서 나오는 $\int_a^b f(x)\,dx$는 튜브의 단면의 면적의 반이고 $2\int_a^b f(x)\,dx$는 튜브의 단면의 면적이 된다. 그리고 $c=25$이다. 이제 튜브의 단면의 면적의 반을 구하자.



$\int_a^b f(x)\,dx=\pi\times 6^2\times\frac{2}{3}+9\sqrt{3}=24\pi+9\sqrt{3}$ 이므로 답은

$$4c\pi\int_a^b f(x)\,dx=100\pi(24\pi+9\sqrt{3})=2400\pi^2+900\sqrt{3}\,\pi$$

이다.

- 2-1번 문항

$h(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{3}}-\frac{x}{\sqrt{3}}$ 이라 할 때, 임의의 실수 c 에 대하여 $h(a)<c<h(b)$ 인 실수 a와 b가 존재한다. 따라서 중간값 정리에 의하여 방정식 $h(x)=c$ 의 해가 존재한다.

$$h'(x) = f'(x) - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos x - 1) \leq 0$$

이므로 $h(x)$가 (상수 함수 아닌) 감소 함수임을 알 수 있다. 따라서 방정식 $h(x)=0$ 의 해는 유일하다.

(별해1) $h(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{\sin x}{\sqrt{3}}$ 으로 정의해서 해의 존재성을 보여도 좋다. 이때 해의 유일성을 보이기 위해서는

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \cos x) \geq 0$$

이므로 $h(x)$가 (상수 함수 아닌) 증가 함수라는 점을 이용해야 한다.

(별해2) $h(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + c - \frac{\sin x}{\sqrt{3}}$ 으로 정의하자. 이때 $h(a) < 0 < h(b)$ 인 실수 a 와 b 가 존재하므로, 중간값 정리에 의하여 해가 존재한다. 또한

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \cos x) \geq 0$$

이므로 $h(x)$가 (상수 함수 아닌) 증가 함수이므로 해는 유일하다.

- **2-2번 문항**

만약 $L(x_1, x_2) > \frac{1}{\sqrt{3}}$ 을 만족하는 x_1, x_2 가 존재한다면,
평균값 정리에 의하여,
$f'(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$
을 만족하는 점 t가 구간 (x_1, x_2)안에 존재해야 하는데, $\cos x$ 값은 항상 1보다 작으므로 모순이다.

- **2-3번 문항**

구간 $(0, \pi)$에서 $g(x) = L(0, x) = \frac{\sin x}{\sqrt{3}\,x}$ 라 하고, $g(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이라 하면, $g(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, \pi]$에서 연속임을 알 수 있다.
$0(= g(\pi)) < m < \frac{1}{\sqrt{3}}(= g(0))$ 이면 중간값 정리에 의하여 $g(x) = L(0, x) = m$ 을 만족하는 x 가 열린 구간 $(0, \pi)$에 존재함을 알 수 있다.

- **2-4번 문항**

함수의 정의로부터 y 축에 평행한 직선이 회전 이동한 그래프와 두 점에서 만나지 않는다는 조건을 사용해야 한다. (2-1), (2-2), (2-3)의 결과로부터, 문제에서 구하고자 하는 각 θ 의

최댓값 θ_m 은 방정식 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta_m\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 을 만족하므로 $\theta_m=\frac{\pi}{3}$ 를 얻는다.

• 3-1번 문항

$0.0\dot{1}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$는 첫째 항이 $\frac{1}{2^2}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 무한등비급수이므로

$a=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$가 된다.

• 3-2번 문항

두 경우 모두 유한개의 $N_1>N_2>N_3>\cdots$값들을 이용해 M을 만들 때, M보다 작은 N_i중 가장 큰 값부터 M에서 빼기 시작해 0이 되도록 하면 사용하는 전체 N_i의 개수를 최소로 할 수 있다.

예를 들어, 제시문 (가)에서 500, 100, 50, 10에서 가장 큰 값인 500을 1370에서 두 번 뺄 수 있고,

$1370-2\times500=370$보다 작은 값 중 가장 큰 100을 세 번 빼면,
$1370-2\times500-3\times100=70$이 된다. 또, 70보다 작은 수 중 가장 큰 50을 빼면,

$1370-2\times500-3\times100-50-2\times10=0$이 되어 원하는 결과를 얻을 수 있다.

제시문 (나)에서도 같은 방법으로 사용하는 추의 개수가 최소가 되게 할 수 있다.

• 3-3번 문항

(1) $\frac{1}{3}$을 이진법으로 나타내라는 것은 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots$들의 합으로 나타내라는 것이고, 소수점 아래 네 자리까지 구하라는 의미는

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}$중 합을 만들 때 사용되는 것을 구하라는 의미이므로 제시문 (가), (나)에

적용된 것과 같은 방법으로 구해보면, $\frac{1}{3}$보다 작은 수 중 가장 큰 값은 $\frac{1}{2^2}$, 또,

$\frac{1}{3}-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{12}$보다 작은 수 중 가장 큰 값은 $\frac{1}{2^4}$.

따라서 $\frac{1}{3}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots$가 되고, 이진법의 소수점 아래 네 자리까지 구하면 $\underline{0.0101_{(2)}}$이다.

(2) 소수점 아래 네 자리까지 구한 값으로부터 $\frac{1}{3}$을 이진법으로 나타낸 수는 $0.\dot{0}\dot{1}$이 되리라고 예상할 수 있다. 이를 확인하기 위해 $0.\dot{0}\dot{1}$를 무한등비급수를 이용하여 기약분수로 나타내보면

$\frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{3}$ 이므로 $\frac{1}{3}=0.\dot{0}\dot{1}$이다.