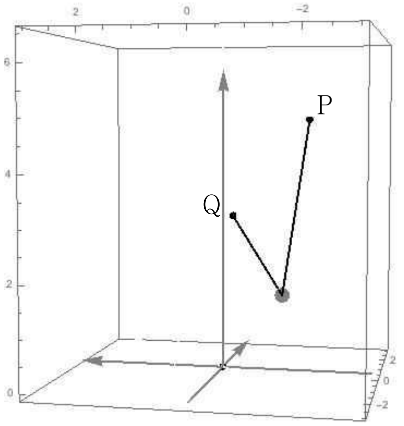
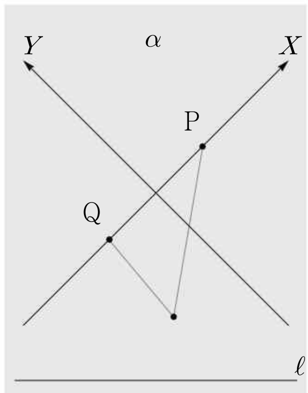
기출 문제 (자연계열 A형)

[문제 1] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

반지를 끼운 실의 양 끝점이 좌표공간의 두 점 $\mathrm{P}(0, -\sqrt{3}, 5)$와 $\mathrm{Q}(1, 0, 3)$에 고정되어 있고, 실의 길이는 $4\sqrt{2}\,\mathrm{m}$이다. (모든 길이의 단위는 m로 생각한다.) 점 P의 위치에서부터 실을 타고 움직인 반지는 xy평면과 가장 가까운 위치에서 더 이상 움직이지 않게 된다.



[그림 1]



[그림 2]

(1-1) 점 P에서 출발한 반지가 실이 팽팽해진 이후 움직이는 궤적은 어떤 이차곡선의 일부가 된다. 이차곡선의 정의를 이용하여, 해당되는 이차곡선이 무엇인지 설명하시오.

한편, 반지가 xy평면과 가장 가까운 위치의 점 R에서 멈췄을 때, 세 점 P, Q, R는 한 평면 α를 결정한다. [그림 2]에서처럼 평면 α 위에서 두 점 P와 Q의 중점이 원점이 되도록 좌표축 X, Y를 잡자. 이때, XY평면 위에서 반지의 궤적을 포함하는 이차곡선의 방정식을 구하시오. (10 점)

(1-2) xy평면과 XY평면의 교선 ℓ의 방정식은 XY평면 위에서 $Y = aX + b$가 된다. 상수 a, b의 값을 각각 구하시오. (10 점)

(1-3) 반지가 xy평면과 가장 가까운 위치의 점 R에서 멈췄을 때, 점 R에서 xy평면까지 이르는 수직거리를 구하시오. (10 점)

[문제 2] 양의 상수 a에 대하여 이차정사각행렬 $N = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$가 조건 $N^3 = O$을 만족

한다. 각 물음에 답하시오.(단, O 은 2×2 영행렬이고, E 는 2×2 단위행렬이다.)

(2-1) 행렬 $E-N$ 의 역행렬이 $E+N+N^2$ 임을 근거를 들어 설명하시오. (10 점)

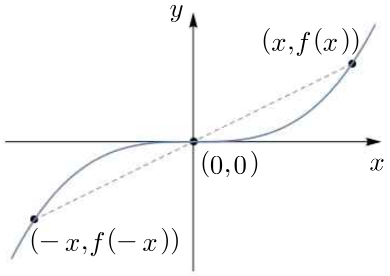
(2-2) 이차정사각행렬 A 가 $NA=AN$ 을 만족할 때, 행렬 $E-AN$ 의 역행렬을 구하시오. (10 점)

(2-3) 행렬 N 의 조건으로부터 N 의 역행렬이 존재하지 않음을 보이고, $b=ac$ 임을 보이시오. (10 점)

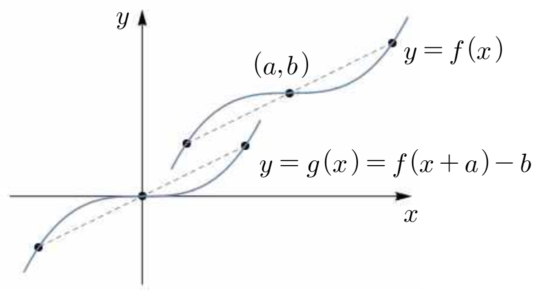
(2-4) $N^2=O$ 이 성립함을 보이시오. (10 점)

[문제 3] 아래 제시문을 읽고, 이를 이용하여 각 물음에 답하시오.

실수에서 정의된 함수 f 가 모든 x 에 대해 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족하면 원점에 대해 점대칭인 함수가 된다. 이는 아래 [그림 1]에서 보듯이 두 점 $(x,f(x))$ 와 $(-x,f(-x))$ 의 중점이 $(0,0)$ 이 된다는 것과 같은 의미이다.



[그림 1]



[그림 2]

같은 방법으로 함수 f 가 점 (a,b) 에 대해 점대칭인 함수라는 말은 두 점 $(a-x,f(a-x))$ 와 $(a+x,f(a+x))$ 의 중점이 (a,b) 라는 뜻이므로 모든 x 에 대해

$$f(a+x)+f(a-x)=2b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

를 만족한다는 것을 알 수 있다.

또는, 점 (a,b) 에 대해 점대칭인 함수 $y=f(x)$ 를 [그림 2]에서처럼 x 축으로 $-a$ 만큼, y 축으로 $-b$ 만큼 평행이동 시켜 얻은 함수를 $g(x)=f(x+a)-b$ 라 하자. 이때 $g(x)$ 가 원점에 대해 점대칭인 함수가 된다는 사실을 이용하여, $g(-x)=-g(x)$ 로부터 식 ①을 얻을 수도 있다.

(3-1) 함수 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 은 점 (a,b) 에 대해 점대칭인 함수가 된다. 점 (a,b) 를 구하시오. (10 점)

(3-2) 함수 $g(x)$ 가 원점 $(0,0)$ 에 대해 점대칭인 함수이고, 함수 $h(x)$ 가 점 $(a,0)$ 에 대해 점대칭인 함수이면, 합성함수 $(g\circ h)(x)$ 는 점 $(a,0)$ 에 대해 점대칭인 함수가 됨을 보이시오. (10 점)

(3-3) (3-1)과 (3-2)의 결과를 이용하여 정적분 $\int_{-1}^{5}\left(4+\sqrt[3]{x^3-6x^2+11x-6}\right)dx$ 의 값을 구하시오. (10 점)

출제의도 (자연계열 A형)

1. 문항1

ㅁ 평가 형태 :문제 해결 능력 평가
실에 매단 반지의 위치를 구하는 문제로 본교 수리논술의 세 가지 형태 중 문제 해결 능력을 평가하는 문항에 해당된다.
ㅁ 평가 요소
: 공간좌표와 공간도형의 개념들을 이용하여 실의 양 끝 점과 반지가 이루는 평면을 생각하고, 도형의 방정식에서 배우는 타원의 정의를 이용하여 실의 반지의 궤적이 이 평면 위에서 타원이 됨을 파악할 수 있는지 평가한다.
또, 직교좌표계를 적절히 도입하여 해당되는 타원의 표준형을 구하고, 직선과 이차곡선의 관계를 이차방정식이나 미분을 이용하여 구할 수 있는 지를 평가한다.

2. 문항2

ㅁ 평가 형태 : 논리적 사고능력 평가
주어진 단계에 따라 논리적으로 사고할 수 있는 지를 평가하는 문항이다.
ㅁ 평가 요소
: 역행렬의 정의, 이차 정사각행렬이 역행렬을 가질 필요충분조건, 행렬의 연산에 대한 성질을 정확하게 이해하고 있는지를 평가한다. 다항식 $(1+x)^3$의 전개와 행렬 $(I+A)^3$의 전개가 동일한 형태가 되는 이유를 아는지 평가한다.

3. 문항3

ㅁ 평가 형태 : 이해능력 평가
주어진 제시문을 읽고, 함수가 점대칭이라는 의미와 평행이동에 대해 도형의 넓이가 변하지 않는다는 사실을 정적분과 관련지어 이해할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
ㅁ 평가 요소
: 제시문에서 설명한 점대칭의 특성을 이해하고, 고등학교에서 배운 정적분의 성질과 결합하여 사고할 수 있는지와 정적분과 함수의 그래프로 둘러싸인 넓이의 관계를 이해하고 있는지를 평가한다.

답안예시 (자연계열 A형)

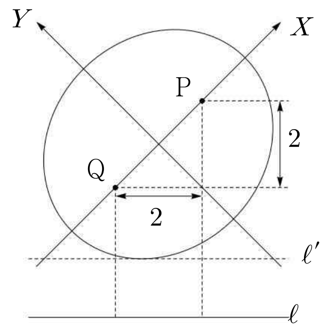
• 1-1번 문항

(1) 반지의 위치를 R 라 하면, 양 끝점으로부터 반지까지의 거리의 합 $\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RQ}}$ 가 $4\sqrt{2}$ 로 일정하다. 따라서, 반지가 움직이는 궤적은 타원의 일부이다.

(2) 두 점 P, Q 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이고, P, Q 를 지나는 직선이 x축, P, Q 의 중점이 원점이므로 초점의 좌표는 $(-\sqrt{2},0)$과 $(\sqrt{2},0)$이다.
또, 실의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로 X 축과 만나는 점의 X 좌표는 $X=\pm 2\sqrt{2}$, Y 축과 만나는 점의 Y 좌표는 $\pm\sqrt{6}$ 이다.
따라서, 구하는 타원의 방정식은 $\dfrac{X^2}{8}+\dfrac{Y^2}{6}=1$이다.

• 1-2번 문항

(단계 1) 반지가 평면과 가장 가까운 위치에서 멈췄을 때, 반지의 위치와 두 점 P, Q 가 이루는 평면 π는 xy 평면과 수직인 평면이다, 이때, 두 평면의 교선을 ℓ이라 하자.



(단계 2) 두 점 P, Q 에서 xy 평면까지 이르는 수직거리의 차가 $5-3=2$이고, 두 점에서 xy 평면 위에 내린 수선의 발 $(0,-\sqrt{3})$, $(1,0)$사이의 거리도 2이므로 평면 π위에서 직선 ℓ과 X축이 이루는 각은 $\dfrac{\pi}{4}$이다. 따라서, XY 평면에서 직선 ℓ의 방정식은 $Y=-X-m\ (m>0)$꼴이다.
(단계 3) 직선 ℓ의 절편 m을 구하기 위해 점 P에서 ℓ에 이르는 수직거리가 5임을 이용하면, $\dfrac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}=5 \Leftrightarrow m=4\sqrt{2}$ 이다.

• 1-3번 문항

(단계 1) 반지가 xy 평면과 가장 가까운 위치는 기울기가 -1인 직선이 접선 ℓ'이 되는 접점의 위치이므로 접선의 기울기가 -1인 타원 위의 점을 구하자.

$\frac{X}{4}+\frac{Y}{3}\frac{dY}{dX}=0$에서 $-1=\frac{dY}{dX}=-\frac{3X}{4Y} \Leftrightarrow X=\frac{4}{3}Y$과 타원의 방정식으로부터 접점의 좌표는 $(X,Y)=\left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}},-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$이다.

(단계 2) 따라서, 지면까지의 거리는 접점 $(X,Y)=\left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}},-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$에서 직선 ℓ까지의 수직거리이므로 $\frac{\left|-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}+4\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}=4-\sqrt{7}$이다.

- **2-1번 문항**

$(E-N)(E+N+N^2)=E-N^3=E$이다. 그러므로 역행렬의 정의에 의해 $E-N$의 역행렬은 $E+N+N^2$이다.

- **2-2번 문항**

$(AN)^3=A^3N^3=O$ 이므로 (2-1)의 결과에 의해 $E-AN$의 역행렬은
$E+AN+(AN)^2=E+AN+A^2N^2$이다.

- **2-3번 문항**

N이 역행렬 N^{-1}을 가지면 $N^3=O$ 에서
$N^{-1}N^3=N^2=O$ 이고 $N^{-1}N^2=N=O$ 이 되어 모순이다. 따라서 N은 역행렬을 가지지 않는다. 그러므로 $ac-b=0$ 이다.

(별해)
$N^3=\begin{pmatrix} a^3+2ab+bc & a^2+b+ac+c^2 \\ a^2b+abc+b^2+bc^2 & ab+2bc+c^3 \end{pmatrix}=O$ 를 풀면
$N=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2 & -a \end{pmatrix}$가 되어 $a(-a)-(-a^2)=0$이 되어 N은 역행렬을 가지지 않는다.
$b=-a^2$, $c=-a$이므로 $b=ac$ 이다.

- **2-4번 문항**

(2-3)에서 $b=ac$이므로 $N=\begin{pmatrix} a & 1 \\ ac & c \end{pmatrix}$이고 $N^2=\begin{pmatrix} a & 1 \\ ac & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ ac & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+ac & a+c \\ a^2c+ac^2 & ac+c^2 \end{pmatrix}=(a+c)N$ 이다. 그리고 $O=N^3=(a+c)N^2=(a+c)^2N$ 에서 $a+c=0$이다. 그러므로 $N^2=O$이다.

(별해) (2-3)의 별해처럼 $N=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2 & -a \end{pmatrix}$ 이므로 $N^2=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2 & -a \end{pmatrix}=O$ 이다.

• 3-1번 문항

(풀이 1) $f(a+x)+f(a-x)=2b$를 만족하는 (a,b)를 직접 계산하여 $(2,0)$에 대해 점대칭인 것을 보일 수 있다.

(풀이 2) 이계도함수 $f''(x)=6x-12=0$이 되는 x값을 구하여, $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$의 변곡점 $(2,0)$을 구한다.
다음 식으로부터 함수 f가 이 점에 대해 대칭임을 보일 수 있다.
(1): $f(2+x)+f(2-x)$
$=((2+x)^3-6(2+x)^2+11(2+x)-6)$
$+((2-x)^3-6(2-x)^2+11(2-x)-6)=0$
또는
(2): $g(x)=f(x+2)=(x+2)^3-6(x+2)^2+11(x+2)-6$
$=x^3-x$
이 원점 대칭임을 보여도 된다.

• 3-2번 문항

점대칭의 정의에 따라
(1) $g(h(a+x))+g(h(a-x))=g(h(a+x))+g(-h(a+x))$
이고,
(2) $g(h(a+x))+g(-h(a+x))=g(h(a+x))-g(h(a+x))=0$
이므로, $(g\circ h)(x)$가 점 $(a,0)$에 대해 점대칭인 함수가 된다는 것을 알 수 있다.
또는 $(g\circ h)(x+a)$가 원점 대칭임을 보여도 된다. 이 경우에도 식 (1)과 (2)를 이용한다.

• 3-3번 문항

그림과 같이 피적분 함수가 점 $(2,4)$에 대해 점대칭이므로, 정적분의 값은 직선 $y=4$, $x=-1$, $x=5$와 x축으로 둘러싸인 직사각형의 넓이 24와 같다.