3) 의학계

문항 1

문제

【문항 1】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.

[제시문]

[가] 함수 $f(x)$ 의 정의역 위의 점 a에 대하여

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재할 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다.

[나] 정의역의 모든 점에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

이다.

[다] $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때, $\alpha = \beta$ 이고 a 에 가까운 모든 x 에 대하여
$f(x) \le h(x) \le g(x)$ 가 성립하면 $\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$이다.

1-1. n 을 2 이상의 자연수라고 할 때, 실수 전체에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x^2} & (x \ne 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

가 $x=0$ 에서 미분가능한지 아닌지를 밝히시오. [10점]

※ 임의의 함수 $g(x)$ 와 임의의 양수 a, b 에 대하여 두 부등식

$$g(a) \le a, \quad g(ab) \le g(a)+g(b)-1$$

이 성립한다고 가정하였을 때, 다음 물음에 답하시오.

1-2. $x>0$, $h>0$ 일 때, 부등식 $\dfrac{h}{x+h} \le g(x+h)-g(x) \le \dfrac{h}{x}$ 가 성립함을 보이시오. [15점]

1-3. $g(x)$ 가 미분가능할 때, 논제1-2와 제시문 [나], [다]를 이용하여, $x>0$ 에서 도함수 $g'(x)$ 를 구하시오. [10점]

문제해설 및 모범답안

1-1.

제시문[가]에 의해 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는 $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 의 값이 존재하여야 한다. .... (2점)

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^n \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x^2} \quad \text{........ (3점)}$$

$-|x^{n-1}| \le x^{n-1} \sin \dfrac{1}{x^2} \le |x^{n-1}|$, $\lim_{x \to 0} (-|x^{n-1}|) = \lim_{x \to 0} |x^{n-1}| = 0$ ($\because n \ge 2$) 이므로,

제시문[다]에 의해서 $\lim_{x \to 0} x^{n-1} \sin \dfrac{1}{x^2} = 0$ 이다. 따라서 $f'(0) = 0$ 으로 존재하므로, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다. .... (5점)

1-2.

$a=x$, $ab=x+h$ 라 두면 $b=\dfrac{x+h}{a}=\dfrac{x+h}{x}$ 이고, a, b 는 양수이다. 이를 부등식

$g(ab) \le g(a)+g(b)-1$ 에 대입하면, $g(x+h) \le g(x)+g\left(\dfrac{x+h}{x}\right)-1$ 이다. .... (4점)

여기서 부등식 $g(b) \le b$ 에 의하여 $g\left(\dfrac{x+h}{x}\right) \le \dfrac{x+h}{x}$ 이므로,

$g(x+h) \le g(x)+\dfrac{x+h}{x}-1 = g(x)+\dfrac{h}{x}$ 이 성립한다.

즉, $g(x+h)-g(x) \le \dfrac{h}{x}$ ----① 이 성립한다. .... (3점)

또한, $a=x+h$, $ab=x$ 라 두면, $b=\dfrac{x}{a}=\dfrac{x}{x+h}$ 이고, a, b 는 양수이다. 이를 부등식

$g(ab) \le g(a)+g(b)-1$ 에 대입하면, $g(x) \le g(x+h)+g\left(\dfrac{x}{x+h}\right)-1$ 이다. .... (4점)

여기서 부등식 $g(b) \le b$ 에 의하여 $g\left(\dfrac{x}{x+h}\right) \le \dfrac{x}{x+h}$ 이므로, 부등식

$g(x) \le g(x+h)+\dfrac{x}{x+h}-1 = g(x+h)-\dfrac{h}{x+h}$ 이 성립한다. 즉,

$\dfrac{h}{x+h} \le g(x+h)-g(x)$ ------② 이 성립한다. .... (3점)

최종적으로 ①, ②에서 $\dfrac{h}{x+h} \le g(x+h)-g(x) \le \dfrac{h}{x}$ 이다. .... (1점)

1-3.

(i) $h>0$ 일 때, 논제 1-2의 결론에 의해 $\dfrac{1}{x+h} \le \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} \le \dfrac{1}{x}$ 이고, 제시문[다]에 의해 $\lim_{h\to 0+} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = \dfrac{1}{x}$ 이다. ………………………………………… (2점)

(ii) $h<0$ 일 때, $|h|$ 를 충분히 작게 하면 $x+h>0$ 이므로, 논제 1-2의 풀이과정과 같이 양수 a, b 를 택할 수 있고, 논제 1-2와 똑같은 결론 $\dfrac{h}{x+h} \le g(x+h)-g(x) \le \dfrac{h}{x}$ 을 얻는다.…… (5점)

여기서 h 가 음수이므로, 양변을 h 로 나누면 $\dfrac{1}{x+h} \ge \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} \ge \dfrac{1}{x}$ 를 얻는다.

그러면 제시문[다]에 의해 $\lim_{h\to 0-} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = \dfrac{1}{x}$ 이다. ……………………………… (2점)

최종적으로 (i), (ii)와 제시문[나]에 의해서, $g'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = \dfrac{1}{x}$ 이다. …(1점)

성적현황

문항	배점	평균	표준편차	최대값	최소값
1-1	10	4.08	2.03	10.00	0.00
1-2	15	4.92	6.01	15.00	0.00
1-3	10	0.55	0.99	10.00	0.00

문항 2

문제

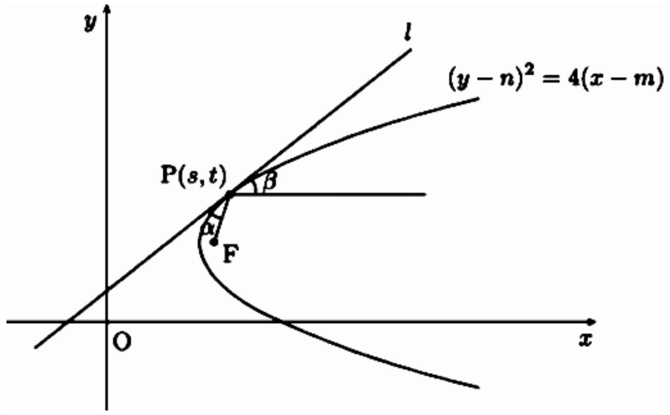
【문항 2】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.

[제시문]

[가] 포물선의 대칭선은 준선에 수직이면서 초점을 지나는 직선인데, 이것을 대칭축이라고 한다. <u>광원을 포물선의 초점에 놓으면, 광원에서 나오는 빛은 포물선에 반사되어 대칭축과 평행한 방향으로 나아간다.</u> 반대로 대칭축에 평행하게 포물선에 들어온 빛은 포물선에 반사되어 포물선의 초점을 지나간다. (여기서 포물선에 반사된다는 것은 포물선의 접선에 반사된다는 것을 말하며, 빛이 포물선의 접선에 반사될 때, 광원에서 포물선에 이르는 선분과 접선이 이루는 각의 크기 α와 빛이 반사되어 나아가는 직선과 접선이 이루는 각의 크기 β는 같다.)

[나] 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 인 점 O, A, B 를 잡았을 때, $\theta = \angle AOB\,(0 \le \theta \le \pi)$ 를 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기라고 한다. 또한, $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ 를 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 의 내적이라 하고 기호로 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 로 나타낸다. 즉, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ 이다.

※ 아래 그림과 같이 좌표평면 위에 포물선 $(y-n)^2 = 4(x-m)$이 있다. 이 포물선의 초점을 F라 하고, 포물선 위를 움직이는 임의의 점 P를 잡고 점 P를 지나는 포물선의 접선을 l 이라 하자. (그림에서 O는 좌표평면의 원점이다.)



2-1. 제시문 [가]의 밑줄 친 부분의 명제가 성립한다는 것을 제시문 [나]를 이용하여 증명하시오. [15점]

2-2. 초점 F 에서 직선 l 위로 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, 제시문 [나]를 이용하여 벡터 $\overrightarrow{HP}$를 구하고, $2\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FG}$ 가 성립하는 점을 G라고 할 때, 점 G의 자취의 방정식을 구하시오. [15점]

문제해설 및 모범답안

2-1.

$\overrightarrow{OP} = (s, t)$라 두면 $(t-n)^2 = 4(s-m)$이고, $\overrightarrow{OF} = (m+1, n)$이므로 $\overrightarrow{FP} = (s-m-1, t-n)$이다. ………………………………………………………… (2점)

$(y-n)^2 = 4(x-m)$를 미분하면 $y' = \dfrac{2}{y-n}$이므로 점 P에서의 포물선의 접선 l 은

$y = \dfrac{2}{t-n}(x-s)+t$이다. ……………………………………………………………… (2점)

따라서 직선 l 의 방향벡터는 $\vec{u} = (t-n, 2)$라 둘 수 있다. 한편, 대칭축은 x축과 평행하므로

방향벡터는 $\vec{h}=(1,0)$이라 둘 수 있다. .... (4점)

$\overrightarrow{\mathrm{FP}}$와 $\vec{u}$(또는 직선 l)가 이루는 각을 α, $\vec{h}$(또는 x축)와 $\vec{u}$(또는 직선 l)가 이루는 각을 β라고 하면

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{\mathrm{FP}}||\vec{u}|}=\frac{(s-m-1)(t-n)+2(t-n)}{\sqrt{(s-m-1)^2+(t-n)^2}\sqrt{(t-n)^2+4}}$$

$$=\frac{t-n}{\sqrt{(t-n)^2+4}}\quad(\because\ (t-n)^2=4(s-m))$$ .... (4점)

$\cos\beta=\dfrac{\vec{h}\cdot\vec{u}}{|\vec{h}||\vec{u}|}=\dfrac{t-n}{\sqrt{(t-n)^2+4}}$ 이므로 $\theta_1=\theta_2$ 이다.

즉, 접선 l에 대한 입사각과 반사각이 같다. 따라서 밑줄 친 부분이 성립함을 알 수 있다. .... (3점)

※ 제시문 [나]를 사용하지 않은 경우(내적을 이용하지 않은 경우) 0점

2-2.

$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=k\vec{u}$ $(k>0)$라 하면 점 H는 초점 F 의 직선 l 위로의 정사영이므로 $k|\vec{u}|=|\overrightarrow{\mathrm{FP}}|\cos\alpha$이다. ...(2점)

2-1에서 $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{\mathrm{FP}}||\vec{u}|}$이므로 $k|\vec{u}|=|\overrightarrow{\mathrm{FP}}|\cos\alpha$에 대입하여 정리하면 $k=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}||\vec{u}|}$이다.

.... (3점)

따라서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}||\vec{u}|}\vec{u}=\dfrac{(s-m+1)(t-n)}{(t-n)^2+4}(t-n,2)$

$=\dfrac{t-n}{4}(t-n,2)$이다. $(\because\ (t-n)^2=4(s-m))$ .... (5점)

한편, $\overrightarrow{\mathrm{FH}}=\overrightarrow{\mathrm{FP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{FP}}-\overrightarrow{\mathrm{HP}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{FH}}=(s-m-1,t-n)-\left(\dfrac{(t-n)^2}{4},\dfrac{t-n}{2}\right)=\left(-1,\dfrac{t-n}{2}\right)$이다. $(\because\ (t-n)^2=4(s-m))$

.... (3점)

여기서 $2\overrightarrow{\mathrm{FH}}=\overrightarrow{\mathrm{FG}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{FG}}=(-2,t-n)$이고 점 G의 좌표는 $(m-1,t)$이다. 따라서 점 G의 자취는 $x=m-1$이고 포물선의 준선이다. .... (2점)

※ 제시문 [나]를 사용하지 않은 경우(내적을 이용하지 않은 경우) 0점

성적현황

문항	배점	평균	표준편차	최대값	최소값
2-1	15	5.41	5.62	15.00	0
2-2	15	1.28	2.75	15.00	0

문항 3

문제

[제시문]

[가] 원은 평면 위에서 한 점으로부터의 거리가 일정한 점들의 집합이며, 구는 공간 위에서 한 점으로부터의 거리가 일정한 점들의 집합이다. 원과 그 내부를 직선으로 자르면 그 단면은 선분이고, 구와 그 내부를 평면으로 자르면 그 단면은 원과 그 원의 내부이다. 서로 다른 두 직선이 만나면 하나의 교점이 생기고, 서로 다른 두 평면이 만나면 하나의 교선이 생긴다.

[나] 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r\,(0\le r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라고 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_nC_r$로 나타낸다.

$${}_nC_r=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} & (r\ge 1)\\ 1 & (r=0)\end{cases}$$

또한, $r>n$인 경우에는 ${}_nC_r=0$ 으로 둔다.

[다] 1부터 n까지의 자연수의 합을 급수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}={}_{n+1}C_2$$

[라] 아래의 그림과 같이 파스칼의 삼각형에서 다음 등식이 성립한다.

(1) ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r\quad(1\le r<n)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=r}^{n}{}_kC_r={}_{n+1}C_{r+1}$

$$\begin{array}{c}
{}_1C_0\ \ {}_1C_1\\
{}_2C_0\ \ {}_2C_1\ \ {}_2C_2\\
{}_3C_0\ \ {}_3C_1\ \ {}_3C_2\ \ {}_3C_3\\
{}_4C_0\ \ {}_4C_1\ \ {}_4C_2\ \ {}_4C_3\ \ {}_4C_4\\
{}_5C_0\ \ {}_5C_1\ \ {}_5C_2\ \ {}_5C_3\ \ {}_5C_4\ \ {}_5C_5\\
{}_6C_0\ \ {}_6C_1\ \ {}_6C_2\ \ {}_6C_3\ \ {}_6C_4\ \ {}_6C_5\ \ {}_6C_6
\end{array}$$

【문항 3】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.

3-1. 원과 그 내부를 5개의 직선으로 잘랐을 때 생기는 조각의 개수가 최대인 경우, 그 값을 구하시오. [10점]

3-2. 원과 그 내부를 n개의 직선으로 잘랐을 때 생기는 조각의 개수가 최대인 경우, 그 값을 구하시오. [10점]

3-3. 구와 그 내부를 n개의 평면으로 잘랐을 때 생기는 조각의 개수가 최대인 경우, 그 값은

$$ {}_{n}C_{3} + {}_{n}C_{2} + {}_{n}C_{1} + {}_{n}C_{0} $$

임을 보이시오. [15점]

문제해설 및 모범답안

3-1.

제시문[가]에 의하여, 2개의 직선을 먼저 그으면 최대 4조각까지 나눌 수 있다. 마지막으로 긋는 세 번째 직선을 이미 그려진 두 개의 직선과 각각 한 점에서 만나게, 그리고 두 직선의 교점을 지나지 않게 그으면, 즉, 이미 그어진 직선들과 평행하지 않고 모두 만나게 그으면 새로 그려진 직선이 3등분 되면서 먼저 나눠진 조각 3개가 둘로 나뉜다. 그러므로 3개의 조각이 늘어나 총 7개가 된다.

즉, 서로 다른 두 직선은 한 점에서 만나고 ………… (3점)

어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않을 때 ………… (3점)

조각의 개수가 최대이다. n개의 직선을 그어 원과 그 내부를 최대로 분할한 수를 $c_2(n)$이라 하면

$n = 1, 2, \cdots, 5$ 일 때 $c_2(1) = 2$

$c_2(2) = 2+2 = 4$

$c_2(3) = 4+3 = 7$

$c_2(4) = c_2(3)+4 = 11$

따라서 $c_2(5) = c_2(4)+5 = 16$ 이다. ……………………………… (4점)

3-2.

$c_2(n)$은 기존에 그어진 서로 평행하지 않은 $n-1$개의 직선으로 나눠진 분할에서, 이미 그어진 직선과 평행하지 않는 새로운 직선 하나를 그어 $n-1$개의 직선과 만나서 n개의 영역을 2개로 나누므로, n개의 영역이 더 생긴다.

그러므로 $c_2(k) = c_2(k-1)+k \quad (k = 2, \cdots, n)$ 이다. ……………………………… (5점)

$$\begin{aligned} c_2(n) &= n+(n-1)+(n-2)+ \cdots +2+c_2(1) \\ &= n+(n-1)+(n-2)+ \cdots +2+1+1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+1 \quad \text{……………………………… (5점)} \\ &= {}_{n+1}C_2+1 \quad \text{(제시문[나]에 의하여)} \\ &= {}_{n}C_2+{}_{n}C_1+{}_{n}C_0 \quad \text{……①} \quad \text{(제시문[다]에 의하여)} \end{aligned}$$

3-3.

n개의 평면으로 구와 그 내부를 최대로 분할한 수를 $c_3(n)$이라 하자.

$c_3(n)$은 기존에 그어진 서로 평행하지 않은 $n-1$개의 평면으로 나눠진 구와 그 내부의 분할에서, n번째 평면으로 자르면 그 단면은 원과 그 내부이다. 이때 잘린 원과 그 내부는 n번째 평면과 그 전에 자른 $n-1$개의 평면과의 교선으로 나눠진 형태를 가진다. 그러므로 $c_2(n-1)$개의 조각이 모두 둘로 나눠게 되므로, 즉, n번째 평면과 그 전에 자른 $n-1$개의 평면과의 교선으로 나누진 $c_2(n-1)$개의 조각이 더 생긴다. ……………………………… (5점)

그러므로 $c_3(k) = c_3(k-1)+c_2(k-1) \quad (k = 2, \cdots, n)$ 이다. ……………………………… (5점)

3-2의 ①을 이용하여

$$\begin{aligned} c_3(n) &= c_3(1)+\sum_{k=1}^{n-1} c_2(k) \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}({}_{k}C_2+{}_{k}C_1+{}_{k}C_0) \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}{}_{k}C_2+\sum_{k=1}^{n-1}{}_{k}C_1+\sum_{k=1}^{n-1}{}_{k}C_0 \\ &= 2+({}_{n}C_3+{}_{1}C_2)+{}_{n}C_2+({}_{n}C_1-{}_{0}C_0) \quad \text{(제시문[라]에 의하여)} \\ &= {}_{n}C_3+{}_{n}C_2+{}_{n}C_1+{}_{n}C_0 \end{aligned}$$

……………………………………………………………… (5점)

(별해 1)

$$\begin{aligned} c_3(n) &= c_3(1)+\sum_{k=1}^{n-1} c_2(k) \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k^2+k}{2}+1\right) \\ &= 2+\frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}\right)+n-1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)n(n-2)}{3}+\frac{n(n-1)\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{n(n-1)}{2}\right)+n+1 \\ &= {}_{n}C_3+{}_{n}C_2+{}_{n}C_1+{}_{n}C_0 \end{aligned}$$

(별해 2)

$$\begin{aligned} c_3(n) &= c_3(1)+\sum_{k=1}^{n-1} c_2(k) \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}(1+{}_{k+1}C_2) \\ &= 2+(n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}({}_{k}C_1+{}_{k}C_2) \quad \text{(제시문[라]에 의하여)} \\ &= 1+n+\sum_{k=1}^{n-1}{}_{k}C_1+\sum_{k=1}^{n-1}{}_{k}C_2 \quad \text{(제시문[라]에 의하여)} \\ &= 1+n+{}_{n}C_2+\sum_{k=1}^{n-1}({}_{k-1}C_1+{}_{k-1}C_2) \\ &= 1+n+{}_{n}C_2+{}_{n-1}C_2+\sum_{k=1}^{n-1}({}_{k-2}C_1+{}_{k-2}C_2) \\ &\vdots \\ &= 1+n+{}_{n}C_2+({}_{n-1}C_2+{}_{n-2}C_2+\cdots+{}_{2}C_2)+{}_{1}C_2+{}_{0}C_2 \quad \text{(제시문 [나],[라])} \end{aligned}$$

$$= 1 + n + {}_nC_2 + \sum_{k=1}^{n-1} {}_kC_2 + 0 + 0$$
$$= {}_nC_3 + {}_nC_2 + {}_nC_1 + {}_nC_0$$

성적현황

문항	배점	평균	표준편차	최대값	최소값
3-1	10	7.83	3.13	10.00	0.00
3-2	10	7.35	3.52	10.00	0.00
3-3	15	0.97	2.95	15.00	0.00

III. 2017학년도 대학입학전형 수시모집 논술고사 분석

1. 지원 및 응시 현황

◎ 계열별 지원자 및 응시자 현황

계열	모집인원	지원인원	지원자 기준 경쟁률	응시인원	응시자 기준 경쟁률	결시율
인문사회계	274명	6,578명	24	2,602명	9.50	60.4%
자연계	481명	8,509명	17.69	3,056명	6.35	64.1%
의학계	43명	4,042명	94	1,274명	29.63	68.5%
총계	798명	19,129명	23.97	6,932명	8.69	63.8%

2017학년도 수시모집 논술고사 계열별 경쟁률