### 세부채점기준

| 문항 | 채점기준 | 배점 |
|---|---|---|
| 3-1 | 제시문 (가)에서 오웰과 헉슬리의 관점을 각각 명확하게 파악했는지 여부 | 5 |
| | 제시문 (가)에서 오웰과 헉슬리의 관점을 제대로 비교했는지 여부 | 5 |
| 3-2 | '빅 브라더'와 '하우디 두디'의 의미를 정확하게 파악했는지 여부 | 7 |
| | ㉠의 함의(含意)를 제대로 서술했는지 여부 | 8 |
| 3-3 | 제시문 (나)와 (다)를 오웰의 관점을 뒷받침하는 사례로 정확하게 연결시켰는지 여부 | 6 |
| | 제시문 (나)와 (다)가 오웰의 관점을 뒷받침하는 이유를 제대로 서술했는지 여부 | 9 |

### 성적현황

| 문항 | 배점 | 평균 | 표준편차 | 최대값 | 최소값 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3-1 | 10 | 6.17 | 2.19 | 9.00 | 0.00 |
| 3-2 | 15 | 8.52 | 6.63 | 15.00 | 0.00 |
| 3-3 | 15 | 4.24 | 4.06 | 15.00 | 0.00 |

## 2) 자연계

### 문항 1

### 문제

**【문항 1】다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.**

[제시문]

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 $x$에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가하고, $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

[나] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라는 것은 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록한 모양에서 위로 볼록한 모양으로 바뀌거나 위로 볼록한 모양에서 아래로 볼록한 모양으로 바뀔 때를 말한다.

[다] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $d$가 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 수라고 하면, $f(c)=d$가 성립하는 점 $c$가 $a$와 $b$사이에 존재한다.

[라] 부정적분 $\int f(x)dx$이 존재하는 함수 $f(x)$와 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여, $x=g(t)$라고 하면

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

가 성립한다.

※ 실수 전체에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 등식

$$f'(x) = 2f(x) - f(x)^2$$

이 성립한다고 하자.

**1-1. 함수 $f(x)$의 치역이 열린구간 $(0, 2)$이고, $f(x)$가 모든 $x$에서 이계도함수를 가지면, 곡선 $y=f(x)$는 변곡점을 가진다는 것을 보이시오. [15점]**

**1-2. $0<f(0)<1$이면 함수 $f(x)$는 유일하게 결정되며 모든 $x$에 대하여 $0<f(x)<2$이다. $f(0)=\dfrac{1}{3}$일 때, 함수 $f(x)$를 구하시오. [20점]**

## 문제해설 및 모범답안

1-1. 함수 $f(x)$의 이계도함수를 구하면

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(x)(2-f(x)) - f(x)f'(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3점) \\ &= 2f'(x)(1-f(x)) = 2f(x)(1-f(x))(2-f(x)) \end{aligned}$$

이고 $\mathrm{P}(a, f(a))$이 이 곡선의 변곡점이 되기 위해서는 $f''(x)=0$,

즉, $f(a)=0,1,2$ 이다. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(2점)

※별해: $f''(x)=0$에서 $f(x)=0,1,2$, $0<f(x)<2$이므로 $f(x)=1$

(i) 함수 $f(x)$가 $0<f(x)<2$이면 $f'(x)=2f(x)-f(x)^2=f(x)(2-f(x))$의 값이 양이므로 **제시문[가]**에 의하여 함수 $f(x)$는 증가한다. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(3점)
그리고 모든 $x$에 대하여 치역이 $(0,2)$이므로 사이값 정리 제시문[다]에 의하여 $f(a)=1$인 점 $\mathrm{P}(a,1)$이 반드시 존재한다. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (4점)

(ii) $f''(a)=0$ 이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양에서 음, 즉 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀐다. 그러므로 **제시문[나]**에 의하여 $\mathrm{P}(a,1)$는 곡선$f(x)$의 변곡점이다. 따라서 변곡점이 존재한다. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (3점)

※ $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다고 단순하게 하면 **2점 감점**하여 **1점**임.

1-2. 모든 실수 $x$에 대하여 $0<f(x)<2$이므로

$$\frac{f'(x)}{f(x)(2-f(x))}=1$$

이 성립하고 양변에 $x$에 대하여 부정적분하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)(2-f(x))}dx = \int 1dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ① \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3점)$$

**제시문[라]**에 의하여 $y=f(x)$로 치환하면 $dy=f'(x)dx$이고

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x)}{f(x)(2-f(x))}dx &= \int \frac{1}{y(2-y)}dy \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4점) \\ &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{2-y}\right)dy \\ &= \frac{1}{2}(\ln y - \ln(2-y)) \quad \cdots\cdots\cdots (3점) \end{aligned}$$

①에서

$$\frac{1}{2}(\ln y - \ln(2-y)) = x + c \ (상수\ c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\ln y - \ln(2-y)) = \ln\frac{y}{2-y} = 2x+2c$$

양변에 지수함수를 취하면

$$\frac{y}{2-y} = e^{2x}e^{2c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ② \quad \cdots\cdots\cdots(3점)$$





이고 $x=0$일 때 $f(0)=y=\frac{1}{3}$ 이므로 ② 에서 $e^{2c}=\frac{1}{5}$ 이다. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (2점)

$$\Rightarrow \frac{y}{2-y}=\frac{1}{5}e^{2x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2점)$$

$$\therefore \ y=f(x)=\frac{2e^{2x}}{5+e^{2x}}=\frac{2}{1+5e^{-2x}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3점)$$

## 성적현황

| 문항 | 배점 | 평균 | 표준편차 | 최대값 | 최소값 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1-1 | 15 | 6.55 | 3.76 | 15.00 | 0.00 |
| 1-2 | 20 | 1.38 | 4.05 | 20.00 | 0.00 |

## 문항 2

## 문제

**【문항 2】다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.**

[제시문]

[가] 확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때, $n$이 충분히 크면 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, np(1-p))$를 따른다.
(여기서, $n$이 충분히 크다는 것은 $np \geq 5$ 와 $n(1-p) \geq 5$ 가 성립하는 경우이다.)

[나] 확률변수 $X$가 평균이 $\mathrm{E}(X)$이고 분산이 $\mathrm{V}(X)$인 정규분포를 따를 때, 확률변수 $Z=\frac{X-\mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

[다] 확률변수 $Z$가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따를 때 $\mathrm{P}(Z>5) \fallingdotseq 0.00001$ 이다.

[라] 크기가 $n$인 표본의 표본비율이 $\hat{p}$일 때, $n$이 충분히 크면 모비율 $p$의 95% 신뢰구간은

$$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

이다.

※ 전국의 고등학교 3학년 남녀 학생들을 무작위로 선출하여, 정답률이 각각 $p_A$, $p_B$인 $A$, $B$ 두 문항 중 한 문항을 선택하여 풀게 하였다.

2-1. $p_A = 70\%$, $p_B = 80\%$ 라고 가정하자. 200명의 학생들이 무작위로 선출되었고, 그 중 100명의 학생들은 $A$ 문항을 선택하였고, 나머지 100명의 학생들은 $B$ 문항을 선택하였다. $A$ 문항을 선택한 학생들 중에서 정답자의 수가 60명 이상일 확률과 $B$ 문항을 선택한 학생들 중에서 정답자의 수가 70명 이상일 확률 가운데서 어느 쪽이 더 큰지를 판별하시오. [15점]

2-2. $A$ 문항을 선택한 학생들의 수는 정해진 상수로서 충분히 큰 수라고 가정하자. 이들 중 남학생의 수는 여학생의 수 보다 여학생 수의 $k\%$ 더 크고, 여학생 중 정답자의 비율은 남학생 중 정답자의 비율보다 남학생 중 정답자의 비율의 $m\%$ 더 작다고 한다. $A$ 문항의 정답률 $p_A$ 의 95% 신뢰 구간의 길이가 최대일 때, $A$ 문항을 선택한 남학생 중 정답자의 비율을 $k$와 $m$에 관한 식으로 나타내시오. [15점]

## 문제해설 및 모범답안

2-1.

(1) $A$문항의 정답자 수는 이항분포 $B(n=100,\ p=0.7)$, $B$ 문항의 정답자 수는 이항분포 $B(n=100,\ p=0.8)$을 각각 따른다. ························································ (2점)

(2) <u>제시문 [가]</u>에 의해 $A$문항의 정답자 수는 근사적으로 정규분포 $N(70,21)$, $B$문항의 정답자 수는 근사적으로 정규분포 $N(80,16)$을 따른다. ··································(2점)

(3) <u>제시문 [나]</u>에 의해서 $A$문항의 정답자 수가 60명 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(60 \le A \le 100) &= P\left(\frac{60-70}{\sqrt{21}} \le Z \le \frac{100-70}{\sqrt{21}}\right) \\ &= P\left(Z \le \frac{30}{\sqrt{21}}\right) - P\left(Z \le -\frac{10}{\sqrt{21}}\right) \\ &= 1 - P\left(Z > \frac{30}{\sqrt{21}}\right) - P\left(Z \le \frac{-10}{\sqrt{21}}\right) \end{aligned}$$

마찬가지로, $B$문항의 정답자 수가 70명 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(70 \le B \le 100) &= P\left(\frac{70-80}{4} \le Z \le \frac{100-80}{4}\right) \\ &= P\left(Z \le \frac{20}{4}\right) - P\left(Z \le -\frac{10}{4}\right) \\ &= 1 - P(Z > 5) - P\left(Z \le \frac{-10}{4}\right) \end{aligned}$$

································································································ (6점)

※ 최대값인 100을 쓰지 않았을 경우 <u>**2점 감점**</u>

(4) <u>**제시문 [다]**</u>에 의해서 $P(Z>5) \approx 0.00001$이고 $P\left(Z > \frac{30}{\sqrt{21}}\right) < P(Z>5) \approx 0.00001$이므로 두 확률 $P\left(Z > \frac{30}{\sqrt{21}}\right)$와 $P(Z>5)$ 은 모두 0에 가깝다고 할 수 있다.
································································································ (3점)

※최대값인 100을 쓰지 않았을 경우 이 부분은 <u>점수 0점</u> 처리함.

(5) $P\left(Z \le \frac{-10}{4}\right) < P\left(Z \le \frac{-10}{\sqrt{21}}\right)$ 이므로 $P(60 \le A \le 100) < P(70 \le B \le 100)$. 즉, 후자의 확률이 더 높다. ························································ (2점) ※ (2), (3), (4)에서 **제시문 [가], [나], [다]**를 언급하지 않았을 경우 <u>각 1점씩 감점</u>. ※ 별해 : (1), (2), (5)는 위와 같고 (3)이 다음과 같다면

$$P(A \ge 60) = P\left(Z \ge \frac{60-70}{\sqrt{21}}\right) = P\left(Z \ge -\frac{10}{\sqrt{21}}\right)$$

$$P(B \ge 70) = P\left(Z \ge \frac{70-80}{4}\right) = P\left(Z \ge -\frac{10}{4}\right)$$

(1) 2점, (2) 2점, (3) 4점, (4) 0점, (5) 2점으로 총 10점.

2-2.

(1) <u>**제시문 [라]에 의해서**</u> $A$문항의 정답률에 대한 95% 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},$$

여기서 $\hat{p}$은 $A$문항을 맞춘 학생들의 비율이다. ························································ (3점)

**※ 신뢰구간의 길이에 대한 식을 제대로 알고 있는지 평가함.**

**※ 2를 곱하지 않았다면 <u>1점 감점</u>, 제시문 [라]를 언급하지 않으면 <u>1점 감점</u>**

(2) 위 식에서 $n$은 정해진 상수로 고정되어 있으므로 신뢰구간의 길이는 $\hat{p}$이 0.5일 때 최대값을 갖는다. ························································ (3점)

**※ 미분 또는 그래프를 포함하여 무엇을 이용하였든지 $\hat{p}$이 0.5일 때 길이가 최대라는 것을 반드시 언급해야함.**

(3) $n_1$은 $A$문항을 선택한 남학생의 수, $n_2$는 $A$문항을 선택한 여학생의 수라고 하자. 그리고 $\hat{p_1}$은 $A$문항의 정답을 맞춘 남학생의 비율이고, $\hat{p_2}$을 $A$문항의 정답을 맞춘 여학생의 비율이라고 하자. 그러면 $A$문항을 선택한 남녀 학생 중에서 정답을 맞춘 학생들의 비율은 다음과 같다.

$$\hat{p}=\frac{\hat{p_1}n_1+\hat{p_2}n_2}{n_1+n_2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(4점)}$$

※ 다른 방식으로 표현했다고 하더라도 전체 학생 수의 정답 비율인 $\hat{p}$을 남녀 각각의 정답자의 비율에 관한 식으로 올바르게 표현했는지 평가함.

(4) 그리고 주어진 문제에 의해서

$$n_1=\left(1+\frac{k}{100}\right)n_2,\quad \hat{p_2}=\left(1-\frac{m}{100}\right)\hat{p_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2점)}$$

※ 위 두 식을 각각 1점씩 채점함.

(5) 이 두 식을 위의 $\hat{p}$에 대입하면

$$\hat{p}=\frac{\left(1+\frac{k}{100}\right)+\left(1-\frac{m}{100}\right)}{\left(1+\frac{k}{100}\right)+1}\hat{p_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(1점)}$$

(6) 그리고 $\hat{p}=\frac{1}{2}$이 되어야 하므로

$$\hat{p_1}=\frac{200+k}{400+2(k-m)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2점)}$$

※ 올바른 풀이과정 없이 답만 맞았을 경우 1점.

### 성적현황

| 문항 | 배점 | 평균 | 표준편차 | 최대값 | 최소값 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2-1 | 15 | 6.48 | 3.12 | 10.00 | 0.00 |
| 2-2 | 15 | 2.20 | 3.56 | 15.00 | 0.00 |



## 문항 3

### 문제

【문항 3】 다음 제시문을 근거로 하여 아래 논제에 답하시오.

**[제시문]**

[가] 삼각형 ABC 의 넓이를 $S$라고 하면

$$S=\frac{1}{2}\overline{AB}\ \overline{AC}\ \sin\angle A$$

이다.

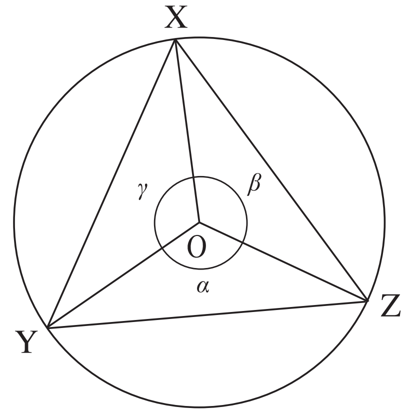
3-1. 아래의 [그림 1]과 같이 삼각형 XYZ는 원점 O를 중심으로 하는 단위원에 내접하는 삼각형이고, 그 삼각형의 내부에 원점이 있다고 하자.

$$\angle YOZ=\alpha,\quad \angle ZOX=\beta,\quad \angle XOY=\gamma$$

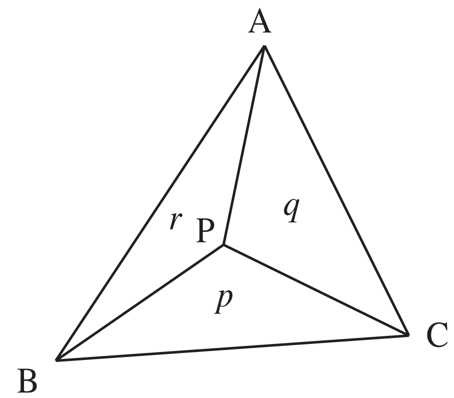
라고 할 때, 등식

$$\sin\alpha\,\overrightarrow{OX}+\sin\beta\,\overrightarrow{OY}+\sin\gamma\,\overrightarrow{OZ}=\vec{0}$$

가 성립함을 보이시오. [15점]




[그림 1]




[그림 2]

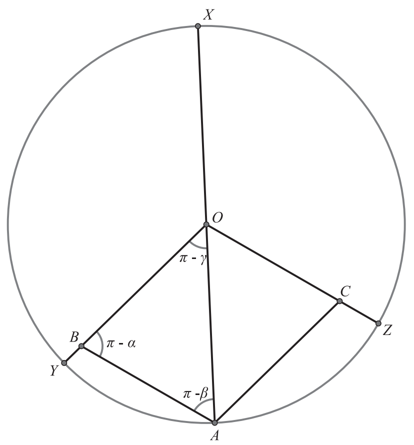
3-2. 위의 [그림 2]와 같이 임의의 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에 대하여 △PBC, △PCA, △PAB의 넓이를 각각 $p, q, r$이라 할 때, 등식

$$p\,\overrightarrow{PA}+q\,\overrightarrow{PB}+r\,\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

가 성립함을 보이시오. [20점]

## 문제해설 및 모범답안

**3-1.**



선분 OX 의 연장선 위에 $\overrightarrow{XO}=\overrightarrow{OA}$ 가 되도록 점 A를 잡는다.
점 A를 지나고 선분 OZ와 평행한 직선이 선분 OY(또는 선분 OY의 연장선)와 만나는 점을 B라 하고, 점 A를 지나고 선분 OY와 평행한 직선이 선분 OZ(또는 선분 OZ의 연장선)와 만나는 점을 C라 하자. ........................................ (7점)

그러면 △OAB 에서

$$\overline{BO}\,\overline{BA}\sin(\pi-\alpha) = \overline{AO}\,\overline{AB}\sin(\pi-\beta) = \overline{OB}\,\overline{OA}\sin(\pi-\gamma)$$

또는

$$\overline{OB}\,\overline{AB}\sin\alpha = \overline{OA}\,\overline{AB}\sin\beta = \overline{OB}\,\overline{OA}\sin\gamma$$

이다. ........................................ (3점)

$\overline{OA}=1$ 이므로

$$\overline{OB}\sin\alpha=\sin\beta,\ \overline{AB}\sin\alpha=\sin\gamma$$

이 된다. 따라서

$$\overline{OB}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \text{ 이고 } \overline{AB}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \text{ 이다.}$$ ........................................ (2점)

□OBAC 는 평행사변형이므로 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$ 이고, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ 이다.

$$-\overrightarrow{OX}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\overrightarrow{OY}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\overrightarrow{OZ}$$

이므로

$$\therefore \sin\alpha\overrightarrow{OX}+\sin\beta\overrightarrow{OY}+\sin\gamma\overrightarrow{OZ}=\vec{0}.$$ ........................................ (3점)

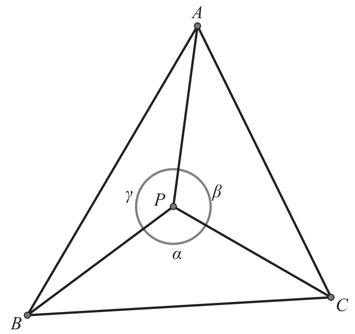
**3-2.**

$\angle BPC=\alpha$, $\angle CPA=\beta$, $\angle APB=\gamma$, $\overline{PA}=a$, $\overline{PB}=b$, $\overline{PC}=c$라 두면

$p=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, $q=\frac{1}{2}ca\sin\beta$, $r=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$이다. ........................................ (3점)

$\overrightarrow{PX}=\frac{1}{a}\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PY}=\frac{1}{b}\overrightarrow{PY}$, $\overrightarrow{PZ}=\frac{1}{c}\overrightarrow{PC}$ 라 두면 ........................................ (5점)

3-1에 의해서, $\sin\alpha\overrightarrow{PX}+\sin\beta\overrightarrow{PY}+\sin\gamma\overrightarrow{PZ}=\vec{0}$,



또는 $\sin\alpha\left(\frac{1}{a}\overrightarrow{PA}\right)+\sin\beta\left(\frac{1}{b}\overrightarrow{PB}\right)+\sin\gamma\left(\frac{1}{c}\overrightarrow{PC}\right)=\vec{0}$ 이다. ........................................ (8점)

양변에 $\frac{1}{2}abc$를 곱하면

$\frac{1}{2}bc\sin\alpha\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}ca\sin\beta\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}ab\sin\gamma\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ 이고

따라서 $p\cdot\overrightarrow{PA}+q\cdot\overrightarrow{PB}+r\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ 이다. ......... (4점)

## 성적현황

| 문항 | 배점 | 평균 | 표준편차 | 최대값 | 최소값 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3-1 | 15 | 0.91 | 2.97 | 15.00 | 0.00 |
| 3-2 | 20 | 1.43 | 3.48 | 20.00 | 0.00 |