2016학년도 수시모집 논술전형 논술고사 출제 영역 및 모범답안

시험유형	인문·사회계	자연계	의학계
	☐	☐	☑

1. 출제의도 및 문제해설

[출제의도]

2016학년도 수시모집 의학계 논술전형 문항은 수학적 기초지식, 문제해결 능력, 계산능력을 측정할 뿐만 아니라, 개념의 확실한 이해정도를 평가하고 새로운 문제에 대하여도 개념과 지식을 확대 적용하여 응용하는 능력을 측정하고, 또한 이 과정에서 제시된 조건들로부터 논리적인 분석 및 추론을 통하여 주어진 문제를 해결할 수 있는 통합적 사고능력을 평가하고자 하였다.

[문제해설]

본 문항은 고등학교 교육과정의 수열, 수열의 극한, 함수의 극한, 미분, 공간도형 등에 관한 단원과 연계하여 출제하였으며 문항별 분석은 다음과 같다.

[문항 1]

제시문에서 고등학교 기하와 벡터 교과서에서 다루는 삼수선의 정리를 이해하고 이를 활용하여 공간도형에서의 기본적인 성질과 문제해결능력을 알아보고자 하였다.

[1-1]

공간상에 있는 직각삼각형의 성질을 이해하여 기본적인 개념을 적용 할 수 있는지 또는 원에 내접하는 직각삼각형의 성질을 이해하고 이를 활용하여 문제를 해결 할 수 있는지를 알아보고자 한다.

[1-2]

삼수선의 정리를 잘 이해하여 이를 응용하여 문제에 적용시키고, 공간도형에서 두 평면들의 위치 관계를 파악하여 문제를 해결할 수 있는지를 알아보고자 한다.

[문항 2]

본 문항은 고등학교 교육과정의 도함수의 활용, 함수의 극한 등에 관한 단원과 연계하여 출제하였으며 문항별 분석은 다음과 같다.

[2-1]

본 문항은 제시문(가)의 정의를 이용하여, 함수의 그래프가 위로 볼록한 함수의 기본적인 성질을 설명할 수 있는 부등식을 보이는 것이다. 이 과정에서 미분가능성의 정의를 정확히 알고, 제시문 (나)에서 제시한 극한의 성질을 정확히 이용하여 원하는 부등식을 논리적으로 설명할 수 있는 능력을 평가한다.

[2-2]

본 문항에서는 위로 볼록한 함수의 성질에 관한 명제를 증명하기 위해서 문항 [2-1]의 결과가 의미하는 위로 볼록한 함수의 기하학적 의미를 파악하고 이를 이용하여 창의적이고 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

[문항 3]

본 문항은 수학 교육과정에서 중요한 학습내용 중 하나인 패턴의 규칙성 개념을 이용하여 주어진 문제에서 그 규칙성을 수학적으로 표현 할 수 있는 지를 확인하고 제시문에 제시된 수식으로부터 일반항을 구하고 그 극한값을 구하는 능력을 알아보고자 한다.

[3-1]

제시문을 이용하여 규칙성을 파악하고 파악된 사실로부터 수열의 문제임을 이해하여 구체적으로 주어진 항에 대한 값을 구할 수 있는지 알아보고자 한다.

[3-2]

문항 [3-1]에서 추론한 규칙성 및 귀납적 정의를 이용하여 점화관계를 구한 후 수열의 극한을 구할 수 있는지 알아보고자 한다.

2. 종합평가 기준

문항	문항정보 필수항목					
	교과목명	평가영역	평가내용	적용교육과정	난이도	배점
1-1	기하와 벡터	공간도형	사면체의 넓이와 변의 관계증명하기	07개정 교육과정	하	10
1-2	기하와 벡터	공간도형	두 사면체 부피 비교하기	07개정 교육과정	상	25
2-1	수학Ⅱ	도함수의 활용 함수의 극한	볼록함수성질을 이용하여 부등식 증명하기	07개정 교육과정	중	15
2-2	수학Ⅱ	도함수의 활용	볼록함수 성질을 이용하여 부등식 증명하기	07개정 교육과정	중	15
3-1	수학Ⅰ	수열	귀납적 정의를 이용하여 수열의 특정 항 구하기	07개정 교육과정	중	15
	수학Ⅱ	함수의 극한				
3-2	수학Ⅰ	수열의 극한	귀납적 정의를 이용하여 수열의 극한 구하기	07개정 교육과정	상	20

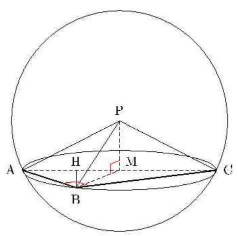
모 범 답 안

【문항 1】

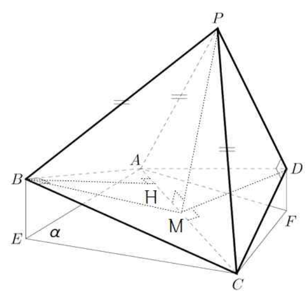
1-1.

$\triangle \mathrm{ABC}$ 가 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점을 M, 점 B 에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 H 라 하면
점 M 은 $\triangle \mathrm{ABC}$의 외심이므로 $\overline{\mathrm{BH}} \le \overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{AM}}$ 이 된다.
그러므로 $\mathrm{S} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}} \cdot \overline{\mathrm{BH}} \le \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}} \cdot \overline{\mathrm{BM}}$ 이고, $\overline{\mathrm{BM}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}$ 이므로 대입하면
$\mathrm{S} \le \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}} \cdot \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}$ 가 되고 따라서 $\mathrm{S} \le \frac{1}{4}\overline{\mathrm{AC}}^{\,2}$ 이다.

1-2.



[그림1]



[그림2]

$\overline{\mathrm{AC}}$ 의 중점을 M 이라 하면 사면체 PABC 에서
$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PC}}$, $\triangle \mathrm{ABC}$가 직각삼각형이므로 [그림1]와 같이 생각할 수 있다.
$\triangle \mathrm{PAM}$, $\triangle \mathrm{PBM}$, $\triangle \mathrm{PCM}$ 에서
점 M 은 $\triangle \mathrm{ABC}$의 외심이므로 $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{CM}}$ 이고, $\overline{\mathrm{PM}}$ 은 공통이다.
따라서 $\triangle \mathrm{PAM} \equiv \triangle \mathrm{PBM} \equiv \triangle \mathrm{PCM}$ 이 된다. 그러므로 $\angle \mathrm{PMB} = \frac{\pi}{2}$이다.
$\overline{\mathrm{PM}} \perp \overline{\mathrm{AM}}$, $\overline{\mathrm{PM}} \perp \overline{\mathrm{BM}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PM}} \perp$ (평면 ABC) 이다.
그러므로 $\overline{\mathrm{PM}}$ 은 사면체 PABC 의 높이이다.
주어진 육면체의 성질(5)에서 평면 ABC와 평면 ACD가 평면 α와 이루는 이면각이
각각 $\frac{\pi}{6}$와 $\frac{\pi}{12}$이므로 평면 PAC와 평면 DAC가 이루는 이면각은 $\frac{\pi}{4}$이다.
주어진 제시문의 삼수선정리 (2)를 활용하면

$\overline{\mathrm{PM}} \perp \overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{PD}} \perp$ (평면ACD) 이므로 $\angle \mathrm{CMD} = \frac{\pi}{2}$이다.
$\angle \mathrm{PMD} = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\triangle \mathrm{PMD}$는 $\overline{\mathrm{PD}} = \overline{\mathrm{MD}}$ 인 직각이등변삼각형임을 알 수 있다.
[그림2]에서 $\overline{\mathrm{PM}} = y$ 이므로 $\overline{\mathrm{PD}} = \overline{\mathrm{MD}} = \frac{1}{\sqrt{2}}y$ 이다.
사면체 PABC 의 부피를 V_1, 사면체 PACD 의 부피를 V_2라 두면
$\mathrm{V}_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AC}} \cdot x\right)y$, $\mathrm{V}_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AC}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)\frac{1}{\sqrt{2}}y$ 이고,
$\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2$ 이므로
구하는 x, y 의 관계식은 $2x - y = 0$ 이다.

【문항 2】

2-1.

함수 $y = f(x)$가 위로 볼록하므로, 제시문 (가)에 의하면 (a,b)에 속하는 $r < t$일 때, $r < s < t$인 임의의 s에 대하여,

$$f(s) \ge \frac{f(t)-f(r)}{t-r}(s-r) + f(r) \quad \cdots\cdots(1)$$

가 성립한다. (1)를 이항하여 정리하면,

$$\frac{f(t)-f(r)}{t-r} \le \frac{f(s)-f(r)}{s-r}$$

가 성립하고,
비슷한 방법으로, 제시문 (가)에 의하여 (a,b)에 속하는 $r < t$일 때, $r < s < t$인 임의의 s에 대하여,

$$f(s) \ge \frac{f(t)-f(r)}{t-r}(s-t) + f(t) \quad \cdots\cdots(2)$$

가 성립한다. (2)를 이항하여 정리하면,

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \le \frac{f(t)-f(r)}{t-r}$$

가 성립한다. 그러므로, (1), (2)에 의하면,

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \le \frac{f(t)-f(r)}{t-r} \le \frac{f(s)-f(r)}{s-r} \quad \cdots\cdots(*)$$

가 성립한다.
f가 r과 t에서 미분가능하므로
$f'(t) = \lim_{s \to t-0}\frac{f(s)-f(t)}{s-t}$ 와 $f'(r) = \lim_{s \to r+0}\frac{f(s)-f(r)}{s-r}$ 이 존재하고, (*)와 제시문 (나)에 의하면,

$$f'(t) = \lim_{s \to t-0}\frac{f(s)-f(t)}{s-t} \le \frac{f(t)-f(r)}{t-r} \text{ 이고}$$

$$\frac{f(t)-f(r)}{t-r} \le \lim_{s \to r+0}\frac{f(s)-f(r)}{s-r} = f'(r) \text{ 이다.}$$

2-2.

[문항 2-1]에 의하면, 임의의 자연수 k에 대하여

$$0 < f'(k+1) \le f(k+1) - f(k) \le f'(k) \le f(k) - f(k-1) \quad \text{..........................} \ (1)$$

가 성립한다.

제시문(가)에 의하면 구간 $[k, k+1]$에서

곡선 $y = f(x)$은 점$(k, f(k))$과 점$(k+1, f(k+1))$을 지나는 직선보다 위에 있고, ...(2)

[문항 2-1]에 의하면 $f(x) \le f'(k+1)(x-(k+1)) + f(k+1)$ 이므로, $[k, k+1]$에서

곡선 $y = f(x)$은 점$(k+1, f(k+1))$에서의 $y = f(x)$의 접선 아래에 있고, ...(3)

(1)에 의하면

$f'(k+1)(x-(k+1)) + f(k+1) \le (f(k+2) - f(k+1))(x-(k+1)) + f(k+1)$ 이므로,

점$(k+1, f(k+1))$에서의 $y = f(x)$의 접선은

점$(k+1, f(k+1))$과 점$(k+2, f(k+2))$을 지나는 직선보다 아래에 있다. ....(4)

함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로 (2),(3),(4)에 의하면

S_k는 점$(k, f(k))$, 점$(k, 2f(k+1) - f(k+2))$과 점$(k+1, f(k+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이 보다 작다. .....(5)

한편, 점$(k, f(k))$과 점$(k+1, f(k+1))$을 지나는 직선과 평행하고 점$C(2, f(2))$를 지나는 직선을 l_k 라 하면 l_k의 방정식은 $y = (f(k+1) - f(k))(x-2) + f(2)$이다.

직선 l_k 와 선분 AB와 만나는 점을 A_k라 하자. $(A_1 = A)$,

(1)에 의하면 l_k의 기울기 $f(k+1) - f(k)$는 감소한다.

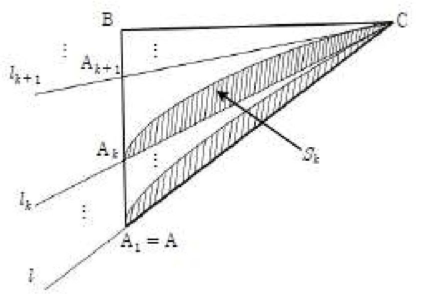
그러므로, 점$A_k(1, y_k)$의 $y_k = f(2) - (f(k+1) - f(k))$는 증가하고,

모든 자연수 n에 대하여, $f(1) = y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n < f(2)$이다. 그러므로,

$$\sum_{k=1}^{n} \triangle A_k A_{k+1} C \text{의 넓이} < \triangle ABC \text{의 넓이} = M \quad \text{.........................} (6)$$

이다.

그런데, 점$(k, f(k))$, 점$(k, 2f(k+1) - f(k+2))$과 점$(k+1, f(k+1))$을 꼭지점으로 하는 삼각형과 삼각형 $A_k A_{k+1} C$ 는 합동이므로 ....(7)



(5),(7)에 의하면, 위 그림과 같이 $S_k \le \triangle A_k A_{k+1} C$ 의 넓이가 성립한다.

그러므로, (6)에 의하면, $\sum_{k=1}^{n} S_k \le \sum_{k=1}^{n} \triangle A_k A_{k+1} C$의 넓이 $< M$

이다.

【문항 3】

3-1.

c_2와 c_3를 구하기 위하여 $f_2(x), f_3(x)$을 구하여보자.

제시문 (다)에서 $n = 1,\ \alpha = 0,\ \beta = 1$을 대입하면

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \dfrac{x^2}{2}\left[-\dfrac{1}{2} + \ln x \right] & (x > 0) \end{cases} \qquad (\text{식}1)$$

가 된다. 그러므로 $c_2 = -f_2(1) = -\left(0 - \dfrac{1}{2^2}\right) = \dfrac{1}{4}$이다.

(식1)의 결과로부터 제시문 (다)에서 $n = 2,\ \alpha = -\dfrac{1}{4},\ \beta = \dfrac{1}{2}$을 대입하면

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \dfrac{x^3}{3}\left[-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} \bullet \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln x \right] & (x > 0) \end{cases}$$

가 된다. 그러므로 $c_3 = -f_3(1) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2}\dfrac{1}{2!} = \dfrac{5}{36}$이다.

3-2.

자연수 $n\ (n = 1, 2, 3 \cdots)$에 대하여

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x^n(a_n + b_n \ln x),\ \ a_1 = 0,\ \ b_1 = 1 & (x > 0) \end{cases} \qquad (\text{식}2)$$

라 하자. 제시문 (다)에 의해

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x^{n+1}\left(\dfrac{(n+1)a_n - b_n}{(n+1)^2} + \left(\dfrac{b_n}{n+1}\right)\ln x \right) & (x > 0) \end{cases} \qquad (\text{식}3)$$

가 된다. (식2)의 $n+1$항은

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x^{n+1}(a_{n+1} + b_{n+1}\ln x) & (x > 0) \end{cases} \qquad (\text{식}4)$$

이다. (식3)와 (식4)으로부터 x^{n+1}, $x^{n+1}\ln x$의 계수를 비교하여

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1},\ \ b_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n - b_n}{(n+1)^2} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2}, \quad a_1 = 0$$

인 수열을 얻는다. 먼저 제시문 (나)에 설명한 귀납적 정의로 주어진 수열 b_n의 일반항을 구하면

$$b_n = \frac{1}{n!}$$

이 되고

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1}-\frac{b_n}{(n+1)^2}=\frac{a_n}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2\times n!},\ a_1=0$$

이 된다. 따라서

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= -a_{n+1}=\frac{-a_n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2\times n!} \\ &= \frac{c_n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2\times n!}, \qquad c_1=0 \end{aligned} \qquad (식5)$$

이 된다. $\frac{(n!)c_n}{\ln n}$ 을 계산하기 위하여 우선 $(n!)c_n$ 을 편의상 $d_n=(n!)c_n$ 라 하자.

문항 3-1 로부터 얻은 (식5)의 $c_{n+1}=\frac{c_n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2\times n!}$ 의 양변에 $(n+1)!$을 곱하면

$$d_{n+1}=d_n+\frac{1}{n+1},\quad d_1=(n!)c_1=0$$

를 얻는다. 이는 제시문 (가)에 설명한 계차수열이 되고 이 계차수열의 일반항은

$$\begin{aligned} & d_1=0, \\ & d_{n+1}=\frac{1}{n+1}+d_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+d_{n-1} \\ & \quad =\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{1+1}+d_1 \\ & \quad =\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2} \\ & \quad =\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m+1} \qquad (n=1,2,3,\cdots) \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)c_n}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{\ln(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m+1}\right) \end{aligned}$$

이다. 제시문 (라)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m+1}}=1$이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)c_n}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m+1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\ln(n+1)}{\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m+1}}}=\frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

이다.