〈자연계열〉

2019학년도
수시전형 논술고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

자연과학 및 공학 분야에서 어떤 현상을 예측하고 맞는지 수학적으로 입증하는 능력은 이공계 대학 교육을 받는 학생에게 전공 공부를 하는데 반드시 필요하다. 반도체의 기본 소자 중 하나인 $p-n$ 접합 다이오드에서 전하들의 이동으로 만들어지는 내부 전기장 및 퍼텐셜을 얻는 과정을 수학 개념을 도입하여 풀 수 있는지 평가하는 문제이다. 이 문제를 풀기 위한 수학적 개념은 함수의 미분법, 적분법 등 고등학생이 알아야 할 기본적인 내용이며 이공계 대학생이 갖춰야 할 기초 지식이기도 하다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 제시문의 조건에 맞는 값을 올바르게 구할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 그림에 주어진 도함수로부터 적분을 이용해 함수를 구할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 앞서 구한 결과를 주어진 상황에 대입하여 올바르게 적분할 수 있는지 평가한다.
[1.4] 앞의 결과를 이용하여 질문에 올바르게 답할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] 넓이는 동일하므로 $10n = \dfrac{m\sqrt{n}+10m}{2}$ 즉, $m = \dfrac{20n}{\sqrt{n}+10}$ 이다.
m, n은 100보다 작은 서로 다른 자연수이므로 이 조건을 만족하는 m과 n을 찾으면 $m=45, n=36$이다.

[1.2] $-10a < x < 0$일 때 $f'(x) = g(x) = -\dfrac{36}{a} \rightarrow f(x) = -\dfrac{36}{a}x + C_1$ 이다.

문제의 조건으로부터 $\displaystyle\lim_{x \to -10a+} f(x) = f(-10a) = 0$이 성립해야하므로 $f(x) = -\dfrac{36}{a}x - 360$이 된다.

$0 < x < 45$일 때 $f'(x) = g(x) = -\dfrac{16}{45}x + 16 \rightarrow f(x) = -\dfrac{8}{45}x^2 + 16x + C_2$ 이다.

여기서 $f(x)$가 연속함수이므로 $f(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0-} f(x) = -360$을 이용하면 $f(x) = -\dfrac{8}{45}x^2 + 16x - 360$이 된다.
한편, $\displaystyle\lim_{x \to 45-} f(x) = 0 = f(45)$이 성립함을 확인할 수 있다.

즉 $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{36}{a}x - 360 & (-10a \le x \le 0) \\ -\dfrac{8}{45}x^2 + 16x - 360 & (0 \le x \le 45) \end{cases}$

이다.

[1.3] $-10a < x < 0$일 때 $h'(x) = -f(x) = \dfrac{36}{a}x + 360 \rightarrow h(x) = \dfrac{18}{a}x^2 + 360x + C_3$ 이다.

여기서 $\displaystyle\lim_{x \to -10a+} h(x) = h(-10a) = 0$을 이용하면 $h(x) = \dfrac{18}{a}x^2 + 360x + 1800a = \dfrac{18}{a}(x+10a)^2$이 된다.

$x>0$일 때 $h'(x)=-f(x)=\frac{8}{45}x^2-16x+360 \rightarrow h(x)=\frac{8}{135}x^3-8x^2+360x+C_4$ 이다.

여기서 $h(x)$가 연속함수이므로 $h(0)=\lim_{x\rightarrow 0-}h(x)=1800a$ 임을 이용하면

$h(x)=\frac{8}{135}x^3-8x^2+360x+1800a$ 이다.

마지막으로 $h(45)=\lim_{x\rightarrow 45-}h(x)=5400+1800a$이다.

즉 $h(x)=\begin{cases} \frac{18}{a}(x+10a)^2 & (-10a \le x \le 0) \\ \frac{8}{135}x^3-8x^2+360x+1800a & (0 \le x \le 45) \end{cases}$

이다.

[1.4] $-10a \le x \le 0$일 때 $h'(x)=\frac{36}{a}(x+10a) \ge 0$ 이므로 $h(x)$는 증가함수이다.

또 $x \ge 0$일 때 $h'(x)=\frac{8}{45}x^2-16x+360=\frac{8}{45}(x^2-90x+45^2)=\frac{8}{45}(x-45)^2 \ge 0$이므로

$h(x)$는 증가함수이다. 그러므로 최댓값은 $x=45$일 때이다.

즉 $M=\frac{8}{135}(45)^3-8(45)^2+360(45)+1800a=5400-16200+16200+1800a=5400+1800a$ 이다.

따라서 $\lim_{a\rightarrow 0+}M=5400$이 된다.

3. 출제근거

「함수의 연속」, 『고등학교 미적분I』, 비상교육, 2017, 62~77쪽.
「미분계수와 도함수」, 『고등학교 미적분I』, 비상교육, 2017, 80~95쪽.
「함수의 증가와 감소」, 『고등학교 미적분I』, 비상교육, 2017, 104~110쪽.
「다항함수의 적분법」, 『고등학교 미적분I』, ㈜지학사, 2018, 144~169쪽.
「함수의 극한」, 『고등학교 미적분I』, ㈜금성출판사, 2017, 52~57쪽.
「도함수의 활용」, 『고등학교 미적분II』, ㈜교학사, 2018, 129~153쪽.
「여러 가지 함수의 적분」, 『고등학교 미적분II』, 비상교육, 2017, 132~145쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

공간도형의 경우에 정사영을 이용하면 특정한 도형의 특성을 알아낼 수 있다. 정사영의 면적을 구하고, 구한 면적을 이용하여 정사영이 타원 모양으로 나타날 때 타원의 특성들을 알아낼 수 있는지 평가하는 문제이다. 한편, 벡터의 개념 활용은 이공계로 진학하려는 학생들이 기본적으로 갖추어야 할 능력이다. 따라서 벡터의 성질을 제대로 활용할 수 있는지 알아보고자 한다. 타원에서 벡터를 적용할 수 있는 능력을 갖추고 있는지와 벡터의 크기가 시간에 따라 변할 때 속력을 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

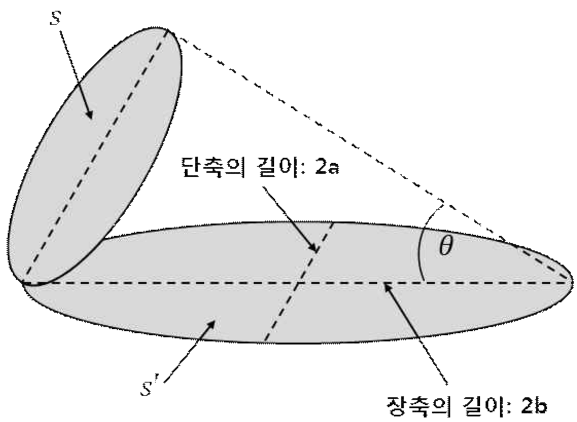
각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 정사영의 넓이를 구하고 정사영이 타원형으로 나타나는 경우 타원의 면적을 정사영의 넓이와 연관 지을 수 있는지 평가한다.
[2.2] 타원에서 주어진 벡터들에 대한 특성을 이해하고 응용할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 타원과 삼각형의 정의와 특성을 이용하여 주어진 선분의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.
[2.4] 타원 위로 임의의 점이 움직일 때 시간에 대해 좌표를 표현하고 그로부터 점의 움직임에 대한 속력과 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 아래 그림과 같이 구의 중심을 지나고 햇빛의 방향에 수직하도록 구를 자르면 잘린 단면은 원이고 그 넓이를 S 라 하자. 이 면과 평평한 지면 사이의 각을 θ, 타원의 넓이를 S' 라 하면 $S = S'\cos(90^\circ - \theta)$ 가 성립한다. 따라서 타원의 넓이 S'는

$S' = \dfrac{S}{\cos(90^\circ - \theta)} = \dfrac{S}{\sin\theta} = \dfrac{400\pi}{\frac{4}{5}} = 500\pi$ 이다.



원의 지름을 L 이라 하면 타원의 장축 길이는 $\dfrac{L}{\sin\theta} = \dfrac{40}{\frac{4}{5}} = 50$ 이다.

(별해)

타원의 넓이는 $S' = \pi ab = \frac{1}{4}\pi(\text{장축의 길이})(\text{단축의 길이}) = 500\pi$ 이다.

단축의 길이는 넓이가 S 인 원의 지름과 같으므로 40 이다. 따라서 장축의 길이는 50 이다.

[2.2]

(1) 높이 구하기 : 원점에서 초점까지 거리가 높이이므로 $\sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ 이다.

(2) 밑변의 길이 구하기:

초점거리를 이용하면 선분 FF′의 길이는 30이다. $\overline{\mathrm{AF}}$를 x라 놓으면

$\overline{\mathrm{AF'}} = \overline{\mathrm{KL}} - x = 2b - x = 50 - x$이다. $\Delta\mathrm{AFF'}$는 직각삼각형이므로 $x^2 + 30^2 = (50 - x)^2$이 성립한다. 방정식의 해는 $x = 16$ 이므로 선분 AB의 길이는 32 이다.

(별해 1)

그림 3에서 선분 KF의 길이를 r, 선분 FL의 길이를 s라 하면, 타원 정의에 따라

$\overline{\mathrm{AF}} + \overline{\mathrm{AF'}} = r + s$ 이므로 $\overline{\mathrm{AF}}$를 x라 놓으면 $\overline{\mathrm{AF'}} = r + s - x$가 된다. 여기서 $\Delta\mathrm{AFF'}$는 직각삼각형이므로 $x^2 + (r - s)^2 = (r + s - x)^2$ 이다. 이 방정식을 풀면 $2(r+s)x = 4rs$, $x = \frac{2rs}{r+s}$ 이므로 선분 AB의 길이는 $\frac{4rs}{r+s} = \frac{1600}{50} = 32$ 이다.

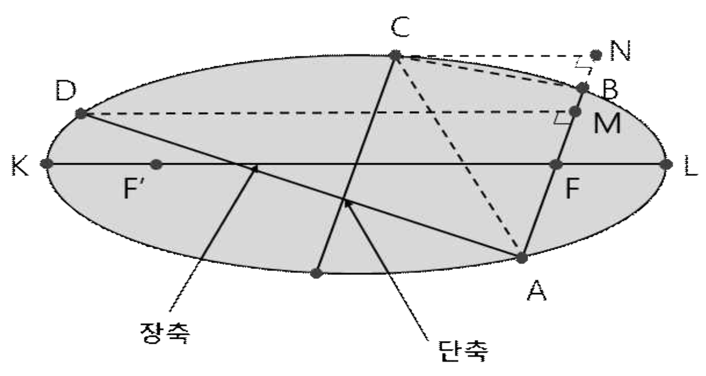
(별해 2)

[2.2] 풀이의 별해와 같이 타원의 중심에서 초점까지 거리는 $\sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ 이고, 타원의 중심을 원점에, 장축을 x축에, 단축을 y축에 놓으면 점 A, B, C의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(15, -16)$, $\mathrm{B}(15, 16)$, $\mathrm{C}(0, 20)$이다. 따라서 선분 AB의 길이는 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |(15,16) - (15,-16)| = 32$ 이다.

(3) 삼각형 넓이: 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \text{밑변의 길이} \times \text{높이} = 240$ 이다.

[2.3] 아래 그림과 같이 타원 위의 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M 이라고 하자. 그러면 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\cos(\angle \mathrm{DAM}) = \pm|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AM}}|$ 이다. 마찬가지로 점 C에서 선분 AB의 연장선 위에 내린 수선의 발을 N이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos(\angle \mathrm{CAN}) = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AN}}|$이다.

즉 $|\overrightarrow{\mathrm{AM}}| \le |\overrightarrow{\mathrm{AN}}|$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} \le \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$이 성립한다.



(별해)
타원의 중심에서 초점까지 거리는 $\sqrt{25^2-20^2}=15$ 이고, 타원의 중심을 원점에, 장축을 x축에, 단축을 y축과 일치하도록 두면 점 A, B, C의 좌표는 각각 A$(15,-16)$, B$(15,16)$, C$(0,20)$이다. 또 점 D의 좌표를 (a,b)라 두면 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(15,16)-(15,-16)=(0,32)$,
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(a-15,b+16)$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-15,36)$이다. 또 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=32(b+16)$,
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=32\times36=1152$ 이고, b의 범위는 $(-20,20)$ 이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 가 성립한다.

[2.4] $y=20\sin t$이므로 타원 방정식을 풀면 $x=\pm25\cos t$ 이다. 타원에서 같은 점의 시간에 따른 위치는 $(\pm25\cos t, 20\sin t)$이므로 속력은 $V=\sqrt{(25)^2\sin^2t+(20)^2\cos^2t}$ 이다. 따라서 최댓값은 $\frac{dV}{dt}=0$을 만족하는 t에서 얻을 수 있다. $\sin 2t=0$로부터 $t=\frac{\pi}{2}$일 때 $\frac{dV}{dt}=0$이 된다. 따라서 $t=\frac{\pi}{2}$에서 최댓값을 가지며 최댓값은 25 이다.

(별해)
$y=20\sin t$이므로 타원 방정식을 풀면 $x=\pm25\cos t$ 이다. 타원에서 같은 점의 시간에 따른 위치는 $(\pm25\cos t, 20\sin t)$이므로 속력은 $V=\sqrt{(25)^2\sin^2t+(20)^2\cos^2t}=\sqrt{20^2+15^2\sin^2t}$ 이다. 따라서 $t=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값은 25 이다.

3. 출제근거

「타원」,『고등학교 기하와 벡터』, 지학사, 2018, 19~24쪽.
「평면벡터의 성분과 내적」,『고등학교 기하와 벡터』, 지학사, 2018, 81~96쪽.
「평면운동」,『고등학교 기하와 벡터』, 지학사, 2018, 108~119쪽.
「정사영」,『고등학교 기하와 벡터』, 지학사, 2018, 143~149쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

이공계 대학생들은 주어진 상황을 이해하고, 수학적으로 기술할 수 능력을 갖추어야 한다. 주어진 상황을 경우의 수와 확률을 이용하여 수학적으로 이해하고 해결할 수 있는지 평가하는 문제이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 조합을 이용하여 문제에서 요구하는 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 경우의 수를 세는 기본 원리인 합의 원리, 곱의 원리, 조합, 이항정리를 이해하고 있는지 평가한다.
[3.3] 주어진 상황을 이해하고 관련 기댓값 계산을 할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 두 장의 카드를 뽑는 경우의 수는 ${}_{30}\mathrm{C}_{2}$ 이다. 짝수 중 3으로 나눈 나머지가 1인 수는 $6m+4$꼴이고, 이를 제곱하면 3으로 나눈 나머지는 1이다. 짝수 중 3으로 나눈 나머지가 2인 수는 $6m+2$ 꼴이고, 이를 제곱하면 3으로 나눈 나머지는 1이다. 이로부터 카드의 수를 문제의 규칙대로 더해서 3의 배수가 될 수 있는 경우는 다음 세 가지임을 알 수 있다.

(1) 뽑은 카드가 모두 3의 배수인 경우 ${}_{10}\mathrm{C}_{2}$ 이다.

(2) 뽑은 카드가 모두 홀수일 때 한 장은 6으로 나눈 나머지가 1이고 다른 한 장은 6으로 나눈 나머지가 5인 경우 ${}_{5}\mathrm{C}_{1}\times{}_{5}\mathrm{C}_{1}$ 이다.

(3) 뽑은 카드의 홀짝이 다를 때 한 장은 6으로 나눈 나머지가 5이고 다른 한 장은 6으로 나눈 나머지가 2 또는 4인 경우 ${}_{5}\mathrm{C}_{1}\times{}_{10}\mathrm{C}_{1}$ 이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{1}\times{}_{5}\mathrm{C}_{1}+{}_{5}\mathrm{C}_{1}\times{}_{10}\mathrm{C}_{1}}{{}_{30}\mathrm{C}_{2}}=\dfrac{45+25+50}{15\times29}=\dfrac{9+5+10}{3\times29}=\dfrac{8}{29}$ 이다.

[3.2] n장의 카드 중 k장을 선택하는 방법의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{\mathrm{k}}$이고, k개의 카드를 2개의 더미로 나누는 방법의 수는 더미 각각에 최소 한 장의 카드가 있어야 하고, 두 더미는 구분되지 않으므로 $\dfrac{2^k-2}{2}$ 이다. 그러므로 k장의 카드를 선택했을 때, 등록하는 방법의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{\mathrm{k}}\times(2^{\mathrm{k}-1}-1)$이다. 따라서 등록하는 방법의 수는

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{\mathrm{k}}(2^{\mathrm{k}-1}-1) &= \frac{1}{2}\left(-1-2\mathrm{n}+\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}{}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{k}}2^{\mathrm{k}}\right)-\left(-1-\mathrm{n}+\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}{}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{k}}\right)\\ &=\frac{3^n-2n-1+2+2n-2^{n+1}}{2}=\frac{3^n-2^{n+1}+1}{2}\end{aligned}$$

이다.

[3.3] 먼저 3장의 카드를 뽑았을 때 점수 획득을 위해서는 최소 2장의 카드를 이용해야 하고 등록한 카드는 다시 이용할 수 없기 때문에 획득 가능한 최대 점수는 1점이다. 즉 3장의 카드를 뽑았을 때 가능한 점수는 1점 혹은 0점이다.

이제 1점을 얻을 수 있는 카드가 뽑힐 확률을 뽑은 카드 중 3의 배수인 카드의 개수에 따라 나누어 생각하자.
우선 3의 배수인 카드가 2장 이상인 경우에는 득점을 할 수 있는 등록 방법이 있다.

(1) 3의 배수가 3장일 확률은 $\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_{3}}{{}_{30}\mathrm{C}_{3}}$ 이다.

(2) 3의 배수가 2장일 확률은 $\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_{2}\times{}_{20}\mathrm{C}_{1}}{{}_{30}\mathrm{C}_{3}}$ 이다.

(3) 3의 배수인 카드가 1장인 경우를 생각하자. 3의 배수를 제외한 2장의 카드의 수는 문항 [3.1]의 풀이로부터 한 장은 6으로 나눈 나머지가 5이고, 다른 한 장은 6으로 나눈 나머지가 1, 2, 또는 4이어야 한다. 따라서 이 경우 확률은 $\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_{1}\times({}_{5}\mathrm{C}_{1}\times{}_{15}\mathrm{C}_{1})}{{}_{30}\mathrm{C}_{3}}$ 이다.

(4) 카드 중 3의 배수인 수가 한 장도 없는 경우에는 점수를 얻는 등록 방법은 없다.

따라서 구하는 확률은 (1)부터 (4)까지의 확률을 더해서 얻을 수 있으므로

$$\frac{{}_{10}\mathrm{C}_3 + {}_{10}\mathrm{C}_2 \times {}_{20}\mathrm{C}_1 + {}_{10}\mathrm{C}_1 \times {}_{5}\mathrm{C}_1 \times {}_{15}\mathrm{C}_1}{{}_{30}\mathrm{C}_3} = \frac{120+900+750}{5\times 29\times 28} = \frac{12+90+75}{29\times 14} = \frac{177}{406}$$ 이다.

결론적으로 얻을 수 있는 점수의 기댓값은

$$1\times\frac{177}{406} + 0\times\left(1-\frac{177}{406}\right) = \frac{177}{406}$$ 이다.

3. 출제근거

「경우의 수」, 『고등학교 확률과 통계』, 천재교육, 2018, 10쪽~18쪽.
「순열」, 『고등학교 확률과 통계』, 천재교육, 2018, 29쪽~32쪽.
「조건부확률과 확률의 곱셈정리」, 『고등학교 확률과 통계』, 천재교육, 2018, 110쪽~115쪽.
「이항정리」, 『고등학교 확률과 통계』, ㈜금성출판사, 2018, 45쪽~50쪽.
「확률의 뜻과 활용」, 『고등학교 확률과 통계』, ㈜금성출판사, 2018, 76쪽~88쪽.
「이산확률분포의 기댓값과 표준편차」, 『고등학교 확률과 통계』, 비상교