〈자연계열-오프라인〉

2019학년도
모의논술고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

수학을 배우는 목적 중 하나는 수학 지식과 이해력을 변경된 조건에 응용하여 문제를 푸는 능력을 배양하는데 있다. 이 문제는 수학공식을 이해하고 주어진 문제에 확대 적용하여 원하는 답을 얻어낼 수 있는지 묻는 문제이다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 삼각함수로 표현되는 원과 쌍곡선에 대한 매개변수 방정식을 이해하고 두 곡선의 교점을 추정할 수 있는지 평가한다.

[1.2] 등비급수의 수렴조건을 이해하고 합을 구할 수 있는지, 또 이차부등식을 풀 수 있는지 평가한다.

[1.3] 확률분포와 그에 따른 표본평균의 분포를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] 첫 번째 매개변수로 나타낸 곡선 $x=\cos\theta, y=\sin\theta$는 $x^2+y^2=1$을 만족하므로 중심이 원점이고 반지름이 1인 원이다. 두 번째 매개변수로 나타낸 곡선 $x=3\tan\theta, y=b\sec\theta$은

$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{b^2}=\tan^2\theta-\sec^2\theta=-1$$

을 만족하므로 두 점 $(0,b)$와 $(0,-b)$를 지나는 쌍곡선이다. 따라서 두 곡선이 서로 다른 네 개의 점에서 만나기 위해서는 $0<|b|<1$이어야 한다.

[1.2] 이 급수가 수렴하기 위한 조건은 $-1<\dfrac{4x}{x^2+3}<1$이므로

$$x^2+3>4x \text{이고 } -(x^2+3)<4x$$

이면 된다. 즉

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)>0 \text{이고 } x^2+4x+3=(x+1)(x+3)>0$$

이어야 하므로 $x<1, x>3$이고 $x<-3, x>-1$이어야 한다. 공통되는 범위를 구하면

$$x<-3,\ -1<x<1,\ x>3$$

이다. 이때 급수의 합은

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4x}{x^2+3}\right)^n=\frac{1}{1-\dfrac{4x}{x^2+3}}=\frac{x^2+3}{x^2-4x+3}$$

이다.

[1.3] $\dfrac{3a_1}{2(a_2+a_3+a_4)}$이 자연수이기 위해서는 $a_1=2,4,6$일 때만 가능하다.

$a_1=2$일 때; $a_2+a_3+a_4=3$인 경우의 수는 1가지

$a_1=4$일 때; $a_2+a_3+a_4=3$인 경우의 수는 1가지

$a_2+a_3+a_4=6$인 경우의 수는 ${}_3H_3={}_5C_3=10$가지

$a_1=6$일 때; $a_2+a_3+a_4=3$인 경우의 수는 1가지

$a_2+a_3+a_4=9$인 경우의 수는 ${}_3H_6-3={}_8C_6-3=25$가지

따라서 주어진 식이 자연수일 경우의 수는 $1+1+10+1+25=38$이므로 확률은 $\frac{38}{6^4}=\frac{19}{648}$이다.

3. 출제근거

「원의 방정식」, 『수학I』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 143-146쪽.
「쌍곡선」, 『기하와 벡터』(고등학교 교과서), ㈜교학사, 2017, 23-27쪽.
「삼각함수 사이의 관계」, 『미적분II』(고등학교 교과서), 좋은책 신사고, 2017, 55-56쪽.
「등비급수」, 『미적분I』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 31-35쪽.
「이차부등식의 풀이」, 『수학I』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 97-100쪽.
「경우의 수」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), 좋은책 신사고, 2017, 12-14쪽.
「중복조합」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), 좋은책 신사고, 2017, 35-37쪽.
「확률」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), 좋은책 신사고, 2017, 62-67쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

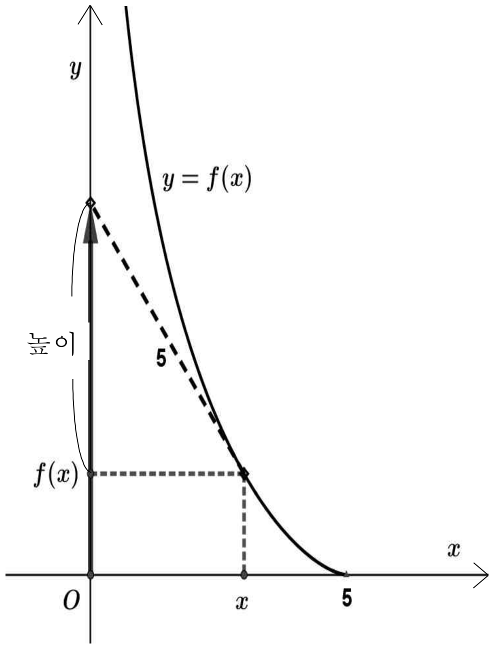
수학 교육의 주요한 목표 중 하나는 주어진 상황을 수학적으로 이해하고 분석하며 이를 바탕으로 실제 생활의 다양한 문제를 해결하는데 응용할 수 있게 하는 것이다. 이 문제에서는 어떤 함수의 형태로 나타난 움직이는 물체의 경로에 대하여 수학적 개념을 사용하여 원하는 답을 얻어낼 수 있는지 묻는 문제이다. 움직이는 물체에 대한 물리적 상황을 도함수를 활용하여 설명할 수 있으며 적분을 이용하여 물체의 경로를 구할 수 있는지 확인한다. 또한, 정적분을 활용하여 곡선의 길이를 구하는 개념을 적용해서 물체가 움직인 거리를 구할 수 있는지 확인한다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 피타고라스의 정리를 활용하여 높이를 구하고 이를 이용하여 접선의 기울기를 함수로 표현할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 접선의 기울기를 알 때 적분을 사용해서 물체의 경로를 구할 수 있는지 평가한다. 또한 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 주어진 적분을 계산할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 정적분을 활용하여 곡선의 길이를 계산할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 아래 그림에서 높이 $h=\sqrt{5^2-x^2}$이므로 $f'(x)=-\frac{h}{x}=-\frac{\sqrt{25-x^2}}{x}$이다.



[2.2] $f(x)=\int f'(x)\,dx=-\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx$ 이다. 여기서, $u=\sqrt{25-x^2}$ 이라하면

$$f(x)=\int \frac{u^2}{25-u^2}du=\int\left\{-1+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{5-u}+\frac{1}{5+u}\right)\right\}du$$
$$=-u+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{5+u}{5-u}\right|+C$$
$$=-\sqrt{25-x^2}+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{5+\sqrt{25-x^2}}{5-\sqrt{25-x^2}}\right|+C$$

이다. 그런데 $f(5)=0$이므로 $C=0$이고,

$$f(x)=-\sqrt{25-x^2}+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{5+\sqrt{25-x^2}}{5-\sqrt{25-x^2}}\right|=-\sqrt{25-x^2}+5\ln\left|\frac{5+\sqrt{25-x^2}}{x}\right|$$

이다.

[2.3] 물체가 $(0,\,5\ln 3)$에 위치할 때 카메라의 위치를 $(x, f(x))$라 하면, $h=5\ln 3-f(x)$이므로

$$\sqrt{25-x^2}=5\ln 3-\left\{-\sqrt{25-x^2}+5\ln\left|\frac{5+\sqrt{25-x^2}}{x}\right|\right\}$$

즉,

$$5\ln 3=5\ln\left|\frac{5+\sqrt{25-x^2}}{x}\right|$$

이다. 이 방정식을 풀면

$$3=\frac{5+\sqrt{25-x^2}}{x}\Rightarrow 3x-5=\sqrt{25-x^2}$$
$$\Rightarrow 10x^2-30x=10x(x-3)=0$$

인데 $x\neq 0$이므로 $x=3$이다. 따라서 $x=3$에서 $x=5$까지 곡선 $f(x)$의 길이를 구하면 된다.

$$L=\int_3^5\sqrt{1+\left(-\frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\right)^2}\,dx=\int_3^5\frac{5}{x}\,dx=5\ln\frac{5}{3}$$

3. 출제근거

「도함수의 활용」『미적분II』(고등학교 교과서), ㈜교학사, 2014, 130-132쪽.
「도함수의 활용」, 『미적분II』(고등학교 교과서), 미래엔, 2014, 124-127쪽.
「부정적분의 치환적분」『미적분II』(고등학교 교과서), ㈜교학사, 2014, 164-168쪽.
「치환적분법」, 『미적분II』(고등학교 교과서), 미래엔, 2014, 156-160쪽.
「속도와 거리」, 『기하와 벡터』(고등학교 교과서), 비상교육, 2014, 98-103쪽.
「속도와 거리」, 『기하와 벡터I』(고등학교 교과서), 미래엔, 2014, 110-120쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

3차원 도형은 공간좌표를 이용하여 해석할 수 있는데 두 변의 각도 추정을 위한 벡터의 활용, 내적의 계산, 삼각형의 정사형의 넓이, 두 평면의 각도 등의 지식을 이용하여 분석할 수 있는지 평가한다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 한 점에서 만나는 두 선분의 각도를 두 벡터를 이용한 $\cos\theta$ 값을 계산하여 확인할 수 있는지 평가한다.

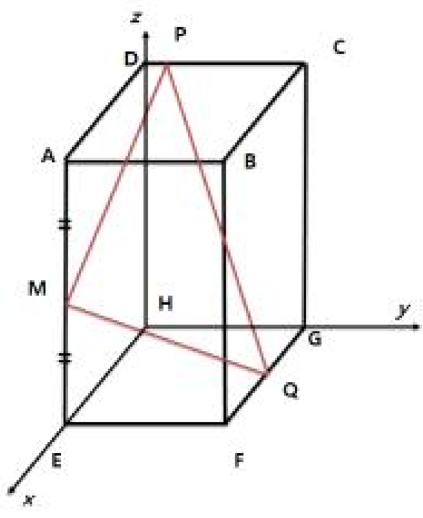
[3.2] 한 점에서 만나는 두 선분이 수직일 때 두 선분의 방향 벡터의 내적이 0인 조건과 두 선분의 길이가 같다는 조건을 이용하여 이 삼각형의 넓이를 계산할 수 있는지 확인한다.

[3.3] 세 점이 지나는 두 평면의 방정식을 유도하고 평면이 이루는 각을 각각의 법선벡터를 이용하여 산정한 뒤 정사영의 넓이를 계산할 수 있는지 확인한다.

[3.4] 정삼각형이 되는 조건을 이용한 뒤 변수의 범위 조건을 사용하여 높이의 최댓값을 계산할 수 있는지 확인한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 직육면체 ABCD$-$EFGH에서 꼭짓점 H를 원점 O, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x, y, z 축의 양의 방향과 일치하도록 좌표공간에 놓으면 아래의 그림과 같다.



$\angle \mathrm{DMF} = \theta$라 하면 D(0, 0, 2), M(1, 0, 1), F(1, 1, 0)이므로 $\overrightarrow{\mathrm{MD}} = (-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{MF}} = (0, 1, -1)$ 이고

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{MD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MD}}||\overrightarrow{\mathrm{MF}}|} = \frac{0+0-1}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = -\frac{1}{2} < 0$$

이다. 따라서 θ가 90° 보다 크다.

[3.2] 세 점의 좌표는 $\mathrm{P}(0,t,2)$, $\mathrm{Q}(s,1,0)$, $\mathrm{M}(1,0,1)$ $(0 \le t,\ s \le 1)$이다. 삼각형 PMQ는 직각이등변 삼각형이므로 $\overline{\mathrm{MP}}^2 = \overline{\mathrm{MQ}}^2$이다. 두 변의 길이는

$$\overline{\mathrm{MP}} = \sqrt{1^2+t^2+1^2}, \quad \overline{\mathrm{MQ}} = \sqrt{(s-1)^2+1^2+1^2}$$

이므로

$$t^2 = (s-1)^2 \qquad \text{(수식1)}$$

이고 선분 MP와 MQ가 수직이므로 $\overrightarrow{\mathrm{MP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MQ}} = 0$이다.

그런데 $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = (-1, t, 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = (s-1, 1, -1)$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MQ}} = -(s-1)+t-1 = 0$$

이고 따라서

$$t = s \qquad \text{(수식2)}$$

이다. (수식 1)과 (수식 2)를 연립하면 $t = \frac{1}{2}, s = \frac{1}{2}$이다. 따라서 삼각형 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{MP}}^2 = \frac{9}{8}$$

이다.

[3.3] 세 점 $\mathrm{P}(0,\frac{1}{2},2)$, $\mathrm{Q}(\frac{1}{2},1,0)$, $\mathrm{M}(1,0,1)$을 지나는 평면의 방정식은 다음과 같다.

$$2x+2y+z-3=0$$

같은 방법으로 점 $\mathrm{D}(0,0,2)$, $\mathrm{M}(1,0,1)$, $\mathrm{F}(1,1,0)$를 지나는 평면방정식은 다음과 같다.

$$x+y+z-2=0$$

두 평면의 법선 벡터는 각각 $\overrightarrow{n_1} = (2,2,1)$, $\overrightarrow{n_2} = (1,1,1)$이므로 두 벡터가 이루는 각을 γ라 할 때 $\cos\gamma$값은 다음과 같다.

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

따라서 정사영의 넓이는

$$S = \triangle\mathrm{PMQ}\cos\gamma = \frac{5\sqrt{3}}{8}$$

이다.

[3.4] 삼각형 PMQ의 좌표는 $\mathrm{P}(0,t,h)$, $\mathrm{M}(1,0,\frac{h}{2})$, $\mathrm{Q}(s,1,0)$, $(0 \le t, s \le 1,\ h > 0)$이다. 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{MP}}^2 = \overline{\mathrm{MQ}}^2$이다. 이를 정리하면

$$t^2 = (s-1)^2$$

즉,

$$t = -s+1 \text{ 또는 } t = s-1$$

이다. 그런데 $0 \le t, s \le 1$이므로 $t = -s+1$이다. 또 $\overline{\mathrm{MP}}^2 = \overline{\mathrm{PQ}}^2$으로부터

$$1+t^2+\frac{h^2}{4} = s^2+(t-1)^2+h^2$$

을 얻는다. $t=-s+1$를 이용하여 정리하면

$$\frac{3}{4}h^2=-s^2-2s+2$$

인데, $0 \le s \le 1$에서 우변의 최댓값은 2이고, 이때 h의 최댓값은 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$이다.

3. 출제근거

「평면곡선의 접선」,『고등학교 기하와 벡터』, 비상교육, 2017, 37~41쪽.
「평면벡터의 내적」,『고등학교 기하와 벡터』, 비상교육, 2017, 79~84쪽.