<자연계열 - 오후> 문제지

	모집단위	
	성　명	
	수험번호	1 8 1 0 8

2018학년도
수시모집 논술전형고사

□ 문제수 및 고사 시간

문제수	시　간	배점비율
3	15:00~16:40(100분)	[문제 1]은 총 점수의 34%, [문제 2], [문제 3]은 각각 33%

□ 수험생 유의사항

- 답안지에 모집단위, 성명, 수험번호, 주민번호를 정확히 명기
- 계산기와 통신기기 등은 휴대할 수 없으며, 휴대 시 부정행위자로 처리
- 답안지는 1매만 사용해야 하며, 2매 사용 시 무효(0점) 처리
- 반드시 **검은색 필기구**만 사용

  (볼펜, 사인펜 사용가능. **연필, 샤프, 수정액, 수정테이프 사용 불가**)
- **답안지를 수정할 경우 두 줄을 그어 수정**
- 0점 처리 기준
  - 답안지에 답 이외의 특정 표기나 자신의 신원을 드러내는 표시를 한 경우
  - 답안지의 **지정된 범위를 벗어나 답안을 작성**한 경우
  - **풀이과정이 없는** 경우

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 양수 x, y, z에 대하여

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

이므로

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0$$

이 성립한다. 따라서 $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$이고, $a=x^3, b=y^3, c=z^3$ 으로 놓으면

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \qquad (1)$$

임을 알 수 있다. 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.

(나) 좌표공간의 임의의 두 점 $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$의 위치벡터를 각각 $\vec{p}, \vec{q}$ 라고 하고 $\vec{p}$와 $\vec{q}$가 이루는 각을 θ라고 하면, $\vec{p}$와 $\vec{q}$의 내적은 $\vec{p} \cdot \vec{q} = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ 또는 $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta$ 이다. $|\vec{p}|^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $|\vec{q}|^2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2$이므로

$$\begin{aligned}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) &= |\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 \\ &\geq (|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta)^2 \\ &= (\vec{p} \cdot \vec{q})^2 \\ &= (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\end{aligned}$$

이다. 즉, 부등식

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) \geq (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2 \qquad (2)$$

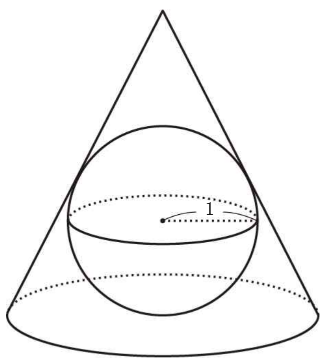
이 성립함을 알 수 있다. 등호는 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$일 때 성립한다.

(다) 미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서
- $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.
- $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

[1.1] 뚜껑이 없는 직육면체 상자의 겉넓이가 75 이다. 제시문 (가)의 부등식 (1)을 이용하여, 이 상자의 부피의 최댓값을 구하시오.

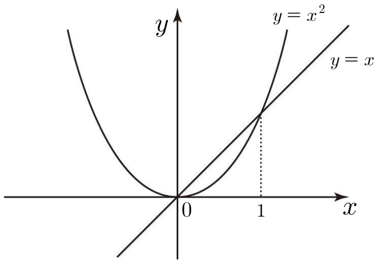
[1.2] 제시문 (나)의 부등식 (2)를 이용하여, $x^2+3y^2+8z^2=1$ 을 만족하는 양수 x, y, z 에 대하여 $x+9y+8z$ 의 최댓값을 구하고, 이때 세 양수 x, y, z 를 구하시오.

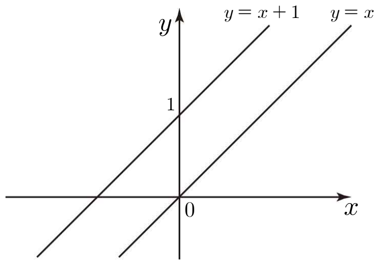
[1.3] 반지름이 1 인 구가 있다. 이 구면에 외접하는 직원뿔의 겉넓이(밑면은 제외) S를 최소로 하는 직원뿔의 높이 x 를 구하시오.



[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 $x=a$에서 만날 때, 즉 $f(a)=a$일 때 a를 함수 f의 고정점이라 한다. 예를 들면 $f(x)=x^2$의 고정점은 0과 1이고, $g(x)=x+1$의 고정점은 존재하지 않는다.





(나) 사이값 정리
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다. 특히 $f(a)f(b)<0$이면 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

(다) 평균값 정리
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능이면 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

[2.1] 집합 $X=\{x \mid 0\le x\le 1\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$가 X에서 연속일 때, f의 고정점이 집합 X에 존재함을 다음과 같이 증명한다. 빈 칸을 모두 채우시오.

[증명] $f(0)=0$ 또는 $\boxed{\text{(A)}}$이면 0 또는 1은 고정점이다. $f(0)\neq 0$이고 $f(1)\neq 1$일 때, $g(x)=f(x)-x$라 하면, g는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이다. $\boxed{\text{(B)}}>0$이고 $\boxed{\text{(C)}}<0$이므로 사이값 정리에 의해 $\boxed{\text{(D)}}$인 c가 열린 구간 $(0,\ 1)$에 존재한다. $f(c)=c$이므로 c는 고정점이다.

[2.2] 집합 $X=\{x \mid 0\le x\le 1\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$가 X에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능이면, 문제 [2.1]에 의해 f의 고정점이 집합 X에 존재하는 것을 알 수 있다. 만약 열린 구간 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 x에서 $f'(x)\neq 1$이면, 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 f의 고정점이 하나만 존재함을 보이시오.

[2.3] 함수 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$의 고정점이 존재하지 않음을 보이시오.

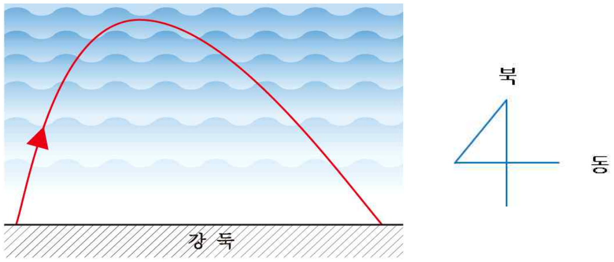
[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 작은 배가 강둑에서 출발하여 흐르는 강물에 수직 방향으로 움직인다. 시각 t에서 강물에 대한 배의 속도 $\overrightarrow{v}(t)$는 다음과 같다.

$$\overrightarrow{v}(t)=\begin{cases}2t\ \overrightarrow{e_2} & (0\le t<2)\\ (8-2t)\ \overrightarrow{e_2} & (t\ge 2)\end{cases}$$

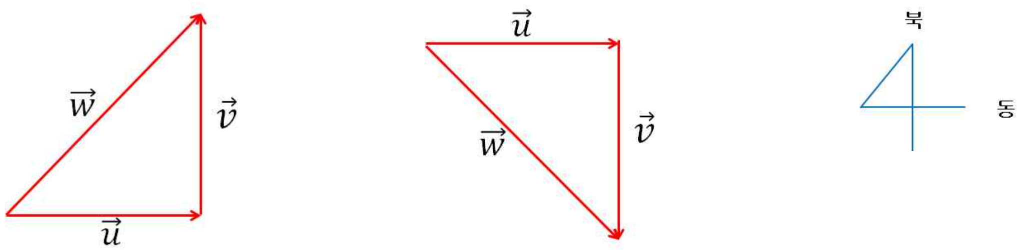
(단, $\overrightarrow{e_1}=(1,0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,1)$.)

강물은 배가 움직이는 동안 동쪽으로 시각 t에서 $\overrightarrow{u}(t)=t\ \overrightarrow{e_1}$ 의 속도로 흐르고 있어서, 강둑에 서 있는 사람에게는 배가 그림과 같은 궤적을 따라 움직이는 것으로 관찰된다.
(단, 배의 크기는 무시하기로 한다.)



(나) 강둑에 대한 강물의 속도를 $\overrightarrow{u}$, 강물에 대한 배의 속도를 $\overrightarrow{v}$, 강둑에 대한 배의 속도를 $\overrightarrow{w}$ 라 하면, 세 속도 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$$



[3.1] 배가 강둑에서 북쪽으로 가장 멀리 도달할 때까지 걸린 시간을 구하시오.

[3.2] 배가 강둑에서 북쪽으로 가장 멀리 도달할 때 배와 강둑 사이의 거리를 구하시오.

[3.3] 배가 강둑을 출발하여 제시문 (가)의 그림과 같이 다시 강둑에 부딪칠 때까지, 동쪽으로 움직인 총 거리를 구하시오.

[3.4] 배가 출발한 후 6초가 되는 순간 강물에 대한 배의 속도를 $\overrightarrow{v}(t)=[-4+c\,(t-6)]\ \overrightarrow{e_2}$ 로 변경하였더니 강둑에 도달할 때 $\overrightarrow{v}(t)=\overrightarrow{0}$ 이 되었다. 이때 상수 c를 구하시오.

〈자연계열 - 오후〉

2018학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

주어진 조건을 만족하는 함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 능력을 배양하는 것은 고등학교 교과 과정에서 중요한 요소이다. 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 절대부등식을 이용하거나, 도함수를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 제시문에 주어진 부등식을 이용하여, 최적화 문제를 풀 수 있는지 평가한다.
[1.2] 절대부등식의 의미를 이해하고, 이를 적용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 미분법을 바탕으로 최대, 최소의 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] x, y, z 를 각각 뚜껑이 없는 상자의 길이(가로), 폭(세로), 높이라고 하자.

그러면 $75 = xy + 2xz + 2yz$ 이고, 제시문 (가)의 부등식으로부터

$$\frac{75}{3} = \frac{xy + 2xz + 2yz}{3} \geq \sqrt[3]{4x^2y^2z^2}$$

이 성립한다. 양변을 세제곱을 하고, 이 상자의 부피를 V 라고 할 때

$$25^3 = \left(\frac{xy + 2xz + 2yz}{3}\right)^3 \geq 4x^2y^2z^2 = 4V^2$$

이므로 $V^2 \leq \frac{25^3}{4}$, $V \leq \frac{1}{2}25^{\frac{3}{2}} = \frac{125}{2}$ 가 성립한다. 따라서 V 의 최댓값은 $\frac{125}{2}$ 이다.

[1.2] 부등식 $(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$ 에 의하여,

$$\begin{aligned}(x + 9y + 8z)^2 &\leq (x^2 + (\sqrt{3}\,y)^2 + (\sqrt{8}\,z)^2)\left(1^2 + \left(\frac{9}{\sqrt{3}}\right)^2 + \sqrt{8}^{\,2}\right) \\ &= \left(1^2 + \left(\frac{9}{\sqrt{3}}\right)^2 + \sqrt{8}^{\,2}\right) \\ &= 36\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 $x + 9y + 8z$ 의 최댓값은 6 이다.

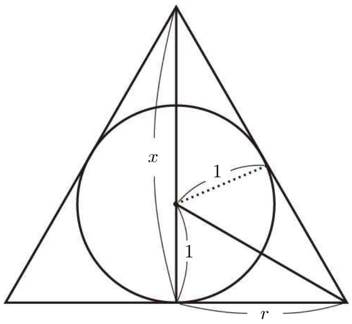
등호가 성립하기 위한 조건으로

$$x = k,\ \sqrt{3}\,y = \frac{9}{\sqrt{3}}k,\ \sqrt{8}\,z = \sqrt{8}\,k,\ \text{즉}\ x = k,\ y = 3k,\ z = k\ \ (k > 0)$$

이것을 $x^2 + 3y^2 + 8z^2 = 1$ 에 대입하면

$k^2 + 3 \cdot 9k^2 + 8k^2 = 1$, $36k^2 = 1$, $k = \frac{1}{6}$ 이므로 $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{6}$ 이다.

[1.3] 직원뿔 밑면의 반지름을 r, 높이를 x 라고 하자. 그러면



$$\frac{1}{2}rx = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot r + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sqrt{x^2+r^2} = \frac{1}{2}(r+\sqrt{x^2+r^2})$$

$$rx = r+\sqrt{x^2+r^2}\ ,\ r(x-1) = \sqrt{x^2+r^2}$$ 이므로,

양변을 제곱하여 정리하면 $r^2 = \dfrac{x}{x-2}\quad (x>2)$

$$S = \pi r\sqrt{x^2+r^2}\quad \text{(직원뿔의 겉넓이)}$$

$$= \pi\sqrt{\frac{x}{x-2}}\sqrt{x^2+\frac{x}{x-2}} = \frac{\pi x(x-1)}{x-2}\quad (x>2)$$

$$S' = \frac{\pi(x^2-4x+2)}{(x-2)^2}\ ,\quad x^2-4x+2=0\quad \therefore\ x = 2+\sqrt{2}\ (\because\ x>2)$$

S는 구간 $(2, 2+\sqrt{2})$에서 감소하고, 구간 $(2+\sqrt{2}, \infty)$에서 증가한다.

그러므로 S는 $x=2+\sqrt{2}$일 때, 최솟값 $(3+2\sqrt{2})\pi$ 을 갖는다.

따라서 $x=2+\sqrt{2}$ 이다.

3. 출제근거

「절대부등식」, 『수학 II』, 지학사, 2017, 56~58쪽.
「절대부등식」, 『수학 II』, 미래엔, 2017, 57~60쪽.
「절대부등식의 증명」, 『수학 II』, 비상교육, 2016, 49~51쪽.
「공간벡터의 성분과 내적」, 『고등학교 기하와 벡터』, 교학사, 2017, 166~175쪽.
「함수의 증가와 감소, 극대와 극소」, 『고등학교 미적분 I』, 비상교육, 2016, 104~110쪽.
「함수의 몫의 미분법」, 『고등학교 미적분 II』, 지학사, 2016, 109~111쪽.
「함수의 그래프」, 『고등학교 미적분 II』, 동아출판, 2016, 154~159쪽.
「함수의 그래프」, 『고등학교 미적분 II』, 신사고, 2017, 115~117쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

사이값 정리, 평균값 정리는 미분적분학의 핵심이다. 이 정리들을 특정한 문제에 활용할 수 있는지 평가한다. 그리고 미분을 이용하여 함수의 증가, 감소를 판별하고 최솟값을 구함으로써 고정점의 존재 여부를 알아낼 수 있는지 평가한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 사이값 정리를 이용하여 주어진 조건에서 고정점 존재 여부를 추론할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 적당한 조건에서 평균값 정리를 이용하여 고정점이 단 하나 존재함을 보일 수 있는지 평가한다.
[2.3] 연속 함수이지만 고정점이 없는 함수가 있다는 것을 밝힐 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] $f(0)=0$ 또는 $\boxed{f(1)=1}$ 이면 0 또는 1은 고정점이다. $f(0)\neq 0$이고 $f(1)\neq 1$일 때, $g(x)=f(x)-x$라 하면, g는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이다.

$\boxed{g(0)}>0$이고 $\boxed{g(1)}<0$이므로 사이값 정리에 의해 $\boxed{g(c)=0}$ 인 c가 열린 구간 $(0,\ 1)$에 존재한다. $f(c)=c$이므로 c는 고정점이다.

(A) $f(1)=1$ (B) $g(0)$ (C) $g(1)$ (D) $g(c)=0$

[2.2] 고정점이 유일하다는 것을 보이기 위해 두 개의 고정점 a, b가 집합 X에 있다고 가정하면 $f(a)=a,\ f(b)=b$이다.

f는 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속, 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능이므로 평균값 정리에 의해 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 인 c가 열린 구간 $(a,\ b)$에 존재한다.

그러나 a, b는 고정점이므로 $f'(c)=\dfrac{b-a}{b-a}=1$이다. 따라서 열린 구간 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 x에서 $f'(x)\neq 1$이라는 조건에 모순이다. 그러므로 고정점은 유일하다.

[2.3] $g(x)=f(x)-x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-x$라 하자.

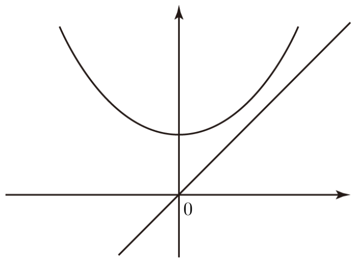
$g'(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})-1=0$으로부터 $e^{2x}-2e^x-1=0$

따라서 $e^x=1+\sqrt{2}$ 이므로 $x=\ln(1+\sqrt{2})$이다.

x		$\ln(1+\sqrt{2})$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$

따라서 $g(x)$의 극솟값(최솟값)은 $g(\ln(1+\sqrt{2}))=\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})$이다.

한편 $1+\sqrt{2}=2.4<2.7=e$이므로 $\ln(1+\sqrt{2})<\ln e=1$이고, 최솟값은 $\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})>0$이다. 따라서 $g(x)=0$인 해가 존재하지 않으므로 $f(x)=x$을 만족하는 해가 존재하지 않고, 따라서 f의 고정점은 존재하지 않는다.



3. 출제근거

「함수의 연속」, 『미적분I』, 미래엔, 2017, 69~79쪽.
「도함수의 활용」, 『미적분I』, 지학사, 2017, 106~124쪽.
「미분계수와 도함수」, 『EBS수능특강수학 Ⅱ& 미적분Ⅰ』, EBS, 2017, 144~153쪽.
「함수의 증가, 감소와 극대, 극소」, 『미적분Ⅰ』, 동아출판, 2017, 142~150쪽.
「지수함수와 로그함수의 미분」, 『미적분II』, 지학사, 2017, 28~41쪽.
「함수의 그래프」, 『미적분I』, 좋은책 신사고, 2017, 124~127쪽.
「지수함수와 로그의 활용」, 『미적분II』, 비상교육, 2017, 19~24쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

벡터는 자연 현상을 이해하고 탐구하는 데 필수적인 수학 도구이다. 고등학교 수학 교과 내용의 하나인 『고등학교 기하와 벡터』 교과목에서는 벡터를 미분법과 적분법에 응용하는 예로서 속도, 가속도 그리고 물체의 이동 거리를 구하는 내용에 대해 자세히 서술하고 있다. 이 문제는 벡터의 개념을 충분히 이해하고 있는지 여부와 미분법과 적분법을 벡터에 적용하여 주어진 물리적인 상황에서 제시한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 속도 벡터의 개념을 이해하고 있는지 여부와 주어진 상황에서 속도 벡터를 적용할 수 있는지 평가한다.

[3.2] 속도가 주어졌을 때 이로부터 적분법을 사용하여 위치의 변화를 구할 수 있는지 평가한다.

[3.3] 평면상에서 주어진 속도 벡터를 성분별로 구분하여 위치 변화 또는 이동 거리에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[3.4] 물체가 움직이는 동안 속도가 달라질 때 구간별로 구분하여 위치 변화를 구할 수 있는지와 주어진 조건을 적절히 적용하면서 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 배가 북쪽으로 가장 멀리 도달할 때 $\vec{v}(t)=0$는 이어야 한다. 따라서 $8-2t=0$ 이 성립해야하며, 이 방정식을 풀면 $t=4$ 이다. (답: $t=4$)

[3.2] $\vec{v}(t)=v(t)\vec{e_2}$ 라 하자. 강둑의 수직 방향 위치를 $y=0$ 이라고 하면, 배가 북쪽으로 가장 멀리 도달할 때 배의 위치 y 는 다음과 같이 주어진다.

$$y=\int_0^4 v(t)dt=\int_0^2 2t\,dt+\int_2^4(8-2t)\,dt$$

위 식에서 적분을 하면, $4+8\times(4-2)-(4^2-2^2)=8$ 이다. (답: 8)

[3.3] 배가 북쪽으로 가장 멀리 도달한 후 다시 강둑으로 향한다. $t=4$ 일 때 $y=8$ 이며, 강둑을 향하여 움직인 후 $t=t_f$에서 $y=0$이 되어야 한다. $t=4$ 부터 $t=t_f$ 까지 $v(t)=8-2t$ 이므로,

$$y=8+\int_4^{t_f}(8-2t)dt=0 \text{ 이 된다.}$$

위 식으로부터 2차 방정식 $t_f^2-8t_f+8=0$ 을 얻는다. 이 방정식을 풀었을 때, 얻을 수 있는 해 중 적절한 해는 $t_f=4+2\sqrt{2}$ 이다.

한편, 시간 t_f 동안 배는 동쪽 방향으로 $u(t)=1t$ 의 속력으로 움직인다. 동쪽 방향의 이동거리를 x 라 하면, $x=\int_0^{t_f}u(t)\,dt=\int_0^{4+2\sqrt{2}}1t\,dt=\frac{1}{2}(4+2\sqrt{2})^2=12+8\sqrt{2}$ 이다. (답: $12+8\sqrt{2}$)

[3.4] 출발 후 $t=6$일 때 배의 북쪽 방향의 위치 y는

$$y=\int_0^6 v(t)dt=\int_0^2 2t\,dt+\int_2^6(8-2t)\,dt$$ 로 주어진다.

위 식에서 적분을 하면 $y=4$가 된다. 따라서 $t=6$ 이후에는 남쪽으로 $8-4=4$ 만큼 더 이동한 후 $v(t)=0$이 되어야 한다.

y축 방향으로의 위치 변화 Δy는

$$\Delta y=-4=\int_6^{t_f}(-4+c(t-6))\,dt$$ 로 주어지며, 적분을 하면 다음과 같다.

$$-4=(-4-6c)(t_f-6)+\frac{c}{2}(t_f^2-36) \text{ ----------(1)}$$

한편 $v(t_f)=0$ 이어야 하므로,

$$-4+c(t_f-6)=0 \text{ 로부터 } c=\frac{4}{t_f-6} \text{ ---------(2)}$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하면 이차방정식 $t_f^2-14t_f+48=0$을 얻는다.

위 이차방정식을 풀었을 때 얻을 수 있는 해 중 적절한 해는 $t_f=8$이다.

$t_f=8$을 식 (2)에 대입하면 $c=2$이다. (답: 2)

3. 출제근거

「평면운동」, 『고등학교 기하와 벡터』, 미래엔, 2017, 106~112쪽.
「평면운동」, 『고등학교 기하와 벡터』, 동아출판, 2016, 124~137쪽.
「평면벡터」, 『고등학교 기하와 벡터』, 미래엔, 2017, 74~75쪽.