<자연계열 - 오전> 문제지

	모집단위	
	성 명	
	수험번호	1 8 1 0 8

2018학년도
수시모집 논술전형고사

□ 문제수 및 고사 시간

문제수	시 간	배점비율
3	09:30~11:10(100분)	[문제 1]은 총 점수의 34%, [문제 2], [문제 3]은 각각 33%

□ 수험생 유의사항

- 답안지에 모집단위, 성명, 수험번호, 주민번호를 정확히 명기
- 계산기와 통신기기 등은 휴대할 수 없으며, 휴대 시 부정행위자로 처리
- 답안지는 1매만 사용해야 하며, 2매 사용 시 무효(0점) 처리
- 반드시 **검은색 필기구**만 사용
  (볼펜, 사인펜 사용가능. **연필, 샤프, 수정액, 수정테이프 사용 불가**)
- **답안지를 수정할 경우 두 줄을 그어 수정**
- 0점 처리 기준
  - 답안지에 답 이외의 특정 표기나 자신의 신원을 드러내는 표시를 한 경우
  - 답안지의 **지정된 범위를 벗어나 답안을 작성**한 경우
  - **풀이과정이 없는** 경우

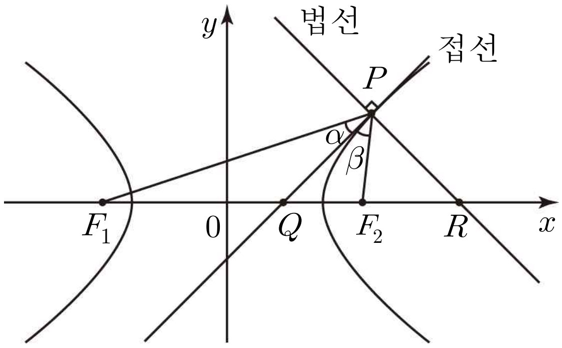
SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 초점 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$$

(나) 쌍곡선 위의 점 $P(x_1, y_1)$에 대해 α와 β를 아래 그림에서 보는 바와 같이 $\angle F_1PQ=\alpha$, $\angle F_2PQ=\beta$라고 하자. (단, $y_1 \neq 0$이다.)



[1.1] 점 P에서 법선의 방정식을 구하시오.

[1.2] $\alpha=\beta$임을 보이시오.

[1.3] F_2에서 발사된 빛이 쌍곡선 위의 점 P에서 반사된다. 반사된 후 빛의 경로를 나타내는 직선의 방정식을 구하시오.

[1.4] 기울기 m인 쌍곡선의 두 접선 사이의 거리 D를 m에 관한 식으로 나타내시오.

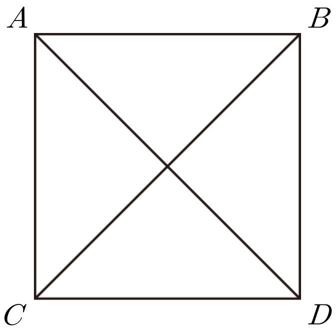
[문제 2] 아래의 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 아래 그림과 같이 네 개의 점들 A, B, C, D가 있다.

(나) 홍길동이 점 A에 있다.

(다) 홍길동은 주사위를 던져 나온 결과에 따라 한 점에서 다른 점으로 이동한다.

(라) 홍길동은 현재 있는 점에서 주사위를 던져 1 또는 2가 나오면 수평 방향, 3 또는 4가 나오면 수직 방향, 5 또는 6이 나오면 대각선 방향에 있는 다른 점으로 이동한다.
예를 들어, 홍길동이 점 A에 있을 때 주사위를 던져 1 또는 2가 나오면 점 B로, 3 또는 4가 나오면 점 C로, 5 또는 6이 나오면 점 D로 이동한다.



[2.1] 홍길동이 주사위를 네 번 던져 네 번째에 처음으로 점 A에 도착하게 될 확률을 구하시오.

[2.2] 홍길동이 주사위를 n 번$(n \geq 2)$ 던져 n 번째에 처음으로 점 A에 도착하게 될 확률을 구하시오.

[2.3] 홍길동이 주사위를 n 번$(n \geq 2)$ 던져 점 A에 도착하면 이동을 종료한다. 이때 다섯 번 이내에 이동이 종료될 확률을 구하시오.

[2.4] 문제 [2.3]에서 홍길동이 주사위를 던진 횟수가 n 번 이내에 이동이 종료될 확률을 구하시오.

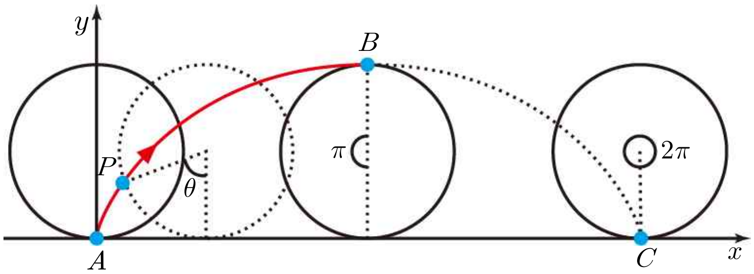
[2.5] 홍길동이 주사위를 네 번 던져 점 A에 도착하면 10점, 점 B에 도착하면 20점, 점 C에 도착하면 30점, 점 D에 도착하면 40점이 주어진다. 홍길동이 주사위를 네 번 던져 얻는 점수의 기댓값을 구하시오.

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

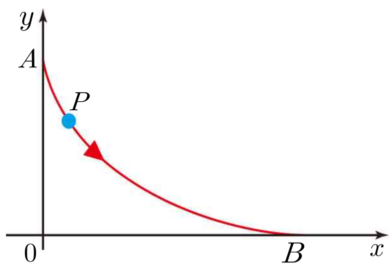
(가) 아래의 <그림 1>은 반지름이 r인 원이 왼쪽에서 오른쪽으로 x축을 따라 미끄러지지 않고 굴러갈 때, 원 위의 고정된 한 점 P가 그리는 궤적($A \to B \to C$)을 나타낸 것이다. 이를 사이클로이드라 한다. 점 P의 좌표 (x, y)를 매개변수 θ로 나타내면

$$x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta)$$

이다. <그림 2>는 <그림 1>의 사이클로이드를 대칭 및 평행이동시켜서 만든 미끄럼틀이다. 이를 사이클로이드 미끄럼틀이라 하자.



<그림 1>



<그림 2>

(나) 사이클로이드 미끄럼틀을 따라 움직이는 물체가 P 지점을 통과할 때 속력이 v, x축으로부터 높이가 h이면, 이 물체의 속력과 높이는 식 $v^2 + 20h = 40r$ 을 만족한다.
(단, 물체는 정지상태에서 A 지점을 출발한다.)

(다) 평면 운동을 하는 물체의 위치 P의 좌표 (x, y)를 $x = \alpha(t), y = \beta(t)$라 하면, 이 물체의 속력은 $v(t) = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2}$ 이다. (단, t는 시간을 나타낸다.)

[3.1] 사이클로이드 미끄럼틀 위의 점 P의 좌표 (x, y)를 r과 θ로 나타내시오.

[3.2] 제시문 (나)를 이용하여 사이클로이드 미끄럼틀 위에서 움직이는 물체가 P 지점을 통과할 때의 속력 v를 r과 θ로 나타내시오. (단, 물체는 정지상태에서 A 지점을 출발한다.)

[3.3] 제시문 (다)를 이용하여 P 지점에서 물체의 속력 v를 r, θ 및 $\frac{d\theta}{dt}$로 나타내고, 문제 [3.2]의 결과를 사용하여 P 지점의 좌표 (x, y)를 시간 t로 나타내시오.

[3.4] 사이클로이드 미끄럼틀 위의 물체가 정지상태에서 A 지점을 출발하여 B 지점에 도달할 때까지 걸린 총 시간을 구하시오.

〈자연계열-오전〉

2018학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

고등학교 수학의 주요한 목표 중 하나는 이차곡선(원추곡선)의 이해이다. 이 문제에서는 쌍곡선의 성질을 알고 있는지 확인하고 삼각함수, 미분, 직선의 방정식 등의 지식을 이용하여 문제해결을 할 수 있는지 평가한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 접점에서 곡선의 법선을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 쌍곡선의 반사의 성질을 보일 수 있는지 평가한다.
[1.3] 쌍곡선의 반사의 성질을 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.4] 쌍곡선의 평행한 두 접선사이의 거리를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{a^2y}$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$이고, 점 P에서 법선의 기울기는 $-\dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}$이다. 따라서 법선의 방정식은 $y=-\dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)+y_1$이다.

[1-2] $\angle PF_1Q=\theta_1$, $\angle PQF_2=\theta_2$, $\angle PF_2R=\theta_3$라 하자.

직선F_1P의 기울기는 $\tan\theta_1=\dfrac{y_1}{x_1+c}$, 점 P에서 접선의 기울기는 $\tan\theta_2=\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$

직선F_2P의 기울기는 $\tan\theta_3=\dfrac{y_1}{x_1-c}$이므로

$$\tan\alpha=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$$

$$=\frac{\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}-\dfrac{y_1}{x_1+c}}{1+\dfrac{b^2x_1y_1}{a^2y_1(x_1+c)}}=\frac{b^2x_1(x_1+c)-a^2y_1^2}{a^2y_1(x_1+c)+b^2x_1y_1}=\frac{b^2(cx_1+a^2)}{cy_1(cx_1+a^2)}=\frac{b^2}{cy_1}$$

$$\because\ \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\ a^2+b^2=c^2$$

$$\tan\beta=\tan(\theta_3-\theta_2)=\frac{\tan\theta_3-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_3\tan\theta_2}$$

$$=\frac{\dfrac{y_1}{x_1-c}-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}}{1+\dfrac{b^2x_1y_1}{a^2y_1(x_1-c)}}=\frac{a^2y_1^2-b^2x_1(x_1-c)}{a^2y_1(x_1-c)+b^2x_1y_1}=\frac{b^2(cx_1-a^2)}{cy_1(cx_1-a^2)}=\frac{b^2}{cy_1}$$

따라서 $\alpha=\beta$이다.

[1.3] [1.2]로부터, 즉 쌍곡선의 반사성질로부터 빛의 경로를 나타내는 직선은 직선 F_1P의 일부이므로 빛의 경로를 나타내는 직선은 $y=\frac{y_1}{x_1+c}(x-x_1)+y_1$ 이다.

[1.4] 기울기 m인 쌍곡선의 두 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 으로 주어지며, 두 평행한 접선이 원점에서 같은 거리에 있으므로 한 점으로부터 직선까지의 거리공식에 의하여

$L(m)=\frac{2\sqrt{a^2m^2-b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$ 이다.

3. 출제근거

「쌍곡선」, 『고등학교 기하와 벡터』, 비상교육, 2016, 21～27쪽.
「평면곡선의 접선」, 『고등학교 기하와 벡터』, 비상교육, 2016, 37～41쪽.
「삼각함수의 덧셈정리」, 『고등학교 미적Ⅱ』, 비상교육, 2016, 75～80쪽.
「직선의 방정식」, 『고등학교 수학Ⅰ』, 비상교육, 2016, 127～140쪽.
「평면 곡선의 접선」, 『고등학교 수능특강, 기하와 벡터』, EBS, 2016, 18～20쪽.
「쌍곡선」, 『고등학교 수능특강, 기하와 벡터』, EBS, 2016, 10～12쪽.
「삼각함수의 미분」, 『고등학교 수능특강, 기하와 벡터』, EBS, 2016, 42～45쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

고등학교 수학 교육의 주요한 목표 중 하나는 학생들로 하여금 확률과 통계의 개념을 이해하고, 이를 실제 생활의 다양한 문제를 해결하는데 응용할 수 있게 하는 것이다. 이 문제는 우리 주위에서 흔하게 일어나는 일들을 경우의 수, 확률, 그리고 기댓값의 개념을 이용하여 확률과 통계 문제로 만들고, 답을 얻어낼 수 있는지 묻는 문제이다. 본 문제를 통해 주어진 조건에서 경우의 수를 이해하고 계산할 수 있는지, 이를 바탕으로 특정 사건의 확률을 구하여 변화된 조건에서 일반화할 수 있는지, 기댓값을 계산할 수 있는지 확인하고자 한다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 주어진 조건에서 경우의 수를 구하고 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 주어진 조건에서 계산한 특정 경우의 수를 일반화할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 주어진 조건이 바뀌는 경우 기존의 결과를 활용하여 새로운 결과를 유도해낼 수 있는지 평가한다.
[2.4] 주어진 조건이 바뀌는 경우에도 경우의 수와 그에 따른 확률을 일반화할 수 있는지 평가한다.
[2.5] 주어진 조건에서 확률변수의 개념을 도입하여 이산확률분포를 구하고, 이를 통해 기댓값을 계산할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 홍길동이 주사위를 네 번 던져 네 번째에 처음으로 점 A에 도착하기 위해서는, 주사위를 세 번 던질 때까지 점 A에 도착한 적이 없어야 한다. 이러한 경우의 수는 주사위를 첫 번째 던져 점 A를 제외한 세 점에 도착하는 3가지, 두 번째와 세 번째 던져 점 A와 현재 있는 점을 제외한 두 점에 도착하는 2가지이다. 따라서 이러한 경우의 수는 $3\times2\times2=12$가지이다. 홍길동이 주사위를 네 번 던질 때 확률은 $\left(\frac{1}{3^4}\right)$이므로 구해지는 확률은 $3\times2^2\times\left(\frac{1}{3^4}\right)=\frac{2^2}{3^3}=\frac{4}{27}$이다.

[2.2] 홍길동이 주사위를 n 번($n\geq2$) 던져 n 번째에 처음으로 점 A에 도착하게 되는 경우의 수는 주사위를 $(n-1)$번 던질 때까지 점 A에 도착한 적이 없는 경우의 수와 동일하다. 홍길동이 주사위를 두 번, 세 번, 네 번 던져 처음으로 점 A에 도착하게 되는 경우의 수는 각각 3가지, 3×2가지, $3\times2\times2$가지이다. 이를 일반화하면 홍길동이 주사위를 n 번 던져 n 번째에 처음으로 점 A에 도착하게 되는 경우의 수는 $3\times2^{n-2}$가지이다. 따라서 홍길동이 주사위를 n 번 던져 n 번째에 처음으로 점 A에 도착하게 되는 확률은 $\frac{3\times2^{n-2}}{3^n}=\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$이다.

[2.3] 홍길동이 주사위를 두 번, 세 번, 네 번, 다섯 번 던져 점 A에 도착하게 되어 이동이 종료될 확률은 문제 [2.2]의 해답에서 구한 바와 같이 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{8}{81}$이다. 홍길동이 주사위를 던져 다섯 번 이내에 이동이 종료될 확률은 앞선 네 개의 확률을 모두 더한 값으로 $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}=\frac{65}{81}$이다.

[2.4] 홍길동이 주사위를 n 번 던져 n 번 이내에 이동이 종료될 확률은 문제 [2.2]의 해답에서 구한 모든 확률을 더한 것으로 다음 식과 같이 구한다.

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{2^{k-2}}{3^{k-1}}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}=\left(\frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1}{\frac{2}{3}-1}=\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

[2.5] 홍길동이 주사위를 네 번 던져 점 A, B, C, D에 도착하는 경우의 수와 확률은 다음과 같이 구한다.

① 점 A에 도착하는 경우의 수는 $3\times(3+2+2)=21$이며 확률은 $\frac{21}{3^4}$이다.

② 점 B에 도착하는 경우의 수는 $2\times(3+2+2)+(2+2+2)=20$이며 확률은 $\frac{20}{3^4}$이다.

③ 점 C에 도착하는 경우의 수는 $2\times(3+2+2)+(2+2+2)=20$이며 확률은 $\frac{20}{3^4}$이다.

④ 점 D에 도착하는 경우의 수는 $2\times(3+2+2)+(2+2+2)=20$이며 확률은 $\frac{20}{3^4}$이다.

홍길동이 주사위를 네 번 던져 얻는 점수를 확률 변수 X라 하면 X의 값은 10, 20, 30, 40이다. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10	20	30	40	합계
$P(X=x)$	$\frac{21}{3^4}$	$\frac{20}{3^4}$	$\frac{20}{3^4}$	$\frac{20}{3^4}$	1

확률변수 X의 기댓값 $E(X)$는 다음과 같이 구한다.

$$E(X)=10\times P(X=10)+20\times P(X=20)+30\times P(X=30)+40\times P(X=40)$$
$$=10\times\frac{21}{3^4}+20\times\frac{20}{3^4}+30\times\frac{20}{3^4}+40\times\frac{20}{3^4}=\frac{670}{27}$$

3. 출제근거

「경우의 수」, 『고등학교 확률과 통계』, 동아출판, 2017, 12~17쪽.
「확률의 덧셈정리」, 『고등학교 확률과 통계』, 동아출판, 2017, 107~111쪽.
「조건부 확률」, 『고등학교 확률과 통계』, 동아출판, 2017, 120~130쪽.
「이산확률변수의 기댓값과 표준편차」, 『고등학교 확률과 통계』, 동아출판, 2017, 152~153쪽.
「경우의 수」, 『고등학교 확률과 통계』, 지학사, 2017, 13~16쪽.
「확률의 기본 성질」, 『고등학교 확률과 통계』, 지학사, 2017, 71~76쪽.
「조건부 확률」, 『고등학교 확률과 통계』, 지학사, 2017, 81~90쪽.
「확률변수와 확률분포」, 『고등학교 확률과 통계』, 지학사, 2017, 103~107쪽.
「등비급수」, 『고등학교 미적분I』, 좋은책 신사고, 2016, 36쪽.
「등비수열의 합」, 『고등학교 수학II』, 비상교육, 2016, 124쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

사이클로이드를 이용한 최단강하선 문제는 17세기말 학술지에 소개된 고난도 문제이다. 사이클로이드의 개념 및 방정식은 고등학교 교과서 및 EBS 중학수학에도 소개되어 있을 정도로 학생들이 공교육 과정에서 자연스럽게 접하고 있다. 본 문제는 고등학교 수학지식을 이용하여 사이클로이드 최단강하선 문제를 단계별로 풀 수 있는지 묻고 있다. 이를 통해 학생들의 수학적 사고 전개능력 및 발전 가능성을 확인하고자 한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 해석학의 기초인 좌표변환을 제대로 이해하고 응용할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 삼각함수에 대한 기본 지식과 주어진 사실(제시문)을 활용하여 문제를 풀 수 있는지 평가한다.
[3.3] 합성함수의 미분법에 대한 이해도를 평가하며, 문제를 여러 각도에서 바라볼 수 있는지 평가한다.
[3.4] 단계별 분석과정을 통해 얻은 지식들을 종합하여 최종 결론을 이끌어 낼 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 사이클로이드 미끄럼틀 위 P점의 x좌표는 <그림 1>의 사이클로이드 P의 x좌표와 같다. 반면에 사이클로이드 미끄럼틀 위 P점의 y좌표는 <그림 1>의 사이클로이드 P의 y 좌표를 x축을 중심으로 대칭 및 $2r$만큼 평행이동을 하는 $y \to -y+2r$ 의 변환을 통해 얻어진다. 따라서 사이클로이드 미끄럼틀 위의 점 P의 좌표는 $P(x,y)=(r(\theta-\sin\theta), r(1+\cos\theta))$ 이다.

[3.2] P 지점의 높이 h는 P 지점의 y 좌표이므로 $h=r(1+\cos\theta)$이다. 따라서 제시문 (나)를 이용하면 속력의 제곱은 $v^2=40r-20h=20r(1-\cos\theta)$를 만족한다. 그러므로 속력 $v=\sqrt{20r(1-\cos\theta)}$ 이다.

[3.3] 제시문 (다)를 이용하여 P 지점의 속력 v는 매개변수 θ로 표시할 수 있다.

$x=\alpha(t), y=\beta(t)$라고 제시문 (다)에 사용한 표현을 인용하면, $v=\sqrt{\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta(t)}{dt}\right)^2}$ 이며,

문제 [3.1]의 결과를 이용하면 $\frac{d\alpha(t)}{dt}=r(1-\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\beta(t)}{dt}=-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$ 이다.

이를 정리하면, $v=\sqrt{\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta(t)}{dt}\right)^2}=r\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,\frac{d\theta}{dt}$을 얻는다.

문제 [3.2]에서 구한 결과와 종합하여 $v=\sqrt{20r(1-\cos\theta)}=r\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,\frac{d\theta}{dt}$에서, $\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{10}{r}}$ 를 얻는다.

따라서 θ는 시간 t에 대한 일차함수로 시간 $t=0$일 때 $\theta(t=0)=0$이므로, $\theta(t)=\sqrt{\frac{10}{r}}\,t$ 임을 알 수 있다.

P 지점의 좌표는 문제 [3.1]에 의해 $(x,y)=\left(r\left(\sqrt{\frac{10}{r}}\,t-\sin\left(\sqrt{\frac{10}{r}}\,t\right)\right), r\left(1+\cos\left(\sqrt{\frac{10}{r}}\,t\right)\right)\right)$ 이다.

[3.4] 물체가 B 지점에 도착하였을 때의 좌표는 $(r\pi, 0)$ 이므로, 문제 [3.3]의 결과를 이용하면 $\alpha(t)=r\left(\sqrt{\frac{10}{r}}\,t-\sin\left(\sqrt{\frac{10}{r}}\,t\right)\right)=r\pi$, $\beta(t)=r\left(1+\cos\left(\sqrt{\frac{10}{r}}\,t\right)\right)=0$의 조건을 얻는다.

이를 통해 $\cos\left(\sqrt{\frac{10}{r}}\,t\right)=-1$ 즉 $\sqrt{\frac{10}{r}}\,t=\pi$ 임을 알 수 있다. 따라서 A 지점에서 출발하여 B 지점에 도달하는데 걸린 총 시간 $t=\pi\sqrt{\frac{r}{10}}$ 이다.

3. 출제근거

「사이클로이드」, 『기하와 벡터』, 비상교육, 2016, 102쪽 및 107쪽.
「사이클로이드」, 『기하와 벡터』, 교학사, 2016, 114쪽.
「사이클로이드」, 『기하와 벡터』, 동아출판, 2016, 131쪽.
「평면좌표」, 『고등학교 수학 I』, 동아출판, 2016, 144~161쪽.
「도형의 평행 및 대칭이동」, 『고등학교 수학 I』, 동아출판, 2016, 202~219쪽.
「호도법과 부채꼴의 호의 길이」, 『고등학교 미적분II』, 동아출판, 2016, 62~68쪽.
「삼각함수의 뜻과 활용」, 『고등학교 미적분II』, 동아출판, 2016, 69~99쪽.
「합성함수의 미분법」, 『고등학교 미적분II』, 동아출판, 2016, 131~135쪽.
「평면운동」, 『기하와 벡터』, 교학사, 2016, 105~114쪽.