

<자연계열>

2017학년도 논술전형
모의고사 출제배경 및 해설



SEOULTECH

서울과학기술대학교

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

대학과정에서 수학을 공부하기 위해서는 함수의 극한, 함수의 연속 등 함수에 관한 기본적인 성질 뿐 아니라 미분을 포함한 여러 가지 계산 능력을 갖추고 있어야 한다. 이 문항에서는 이러한 기본 능력을 갖추고 있는지 확인하고자 하였다. 아울러 단순한 계산을 넘어선 수학적인 아이디어를 찾아낼 수 있는지도 확인하고자 하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

- [1.1] 함수의 극한, 함수의 연속, 다항식의 성질, 미분 등을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 다항식을 구할 수 있는지 평가한다.
- [1.2] n 차 방정식의 해 α 를 알고 있을 때 $\alpha+1$ 이 해가 되는 방정식을 구하는 수학적 창의력이 있는지 평가한다.
- [1.3] 문항 [1.2]와 유사한 아이디어로 $\frac{1}{\alpha}$ 이 해가 되는 다항식을 구할 수 있는지 평가한다.
- [1.4] 문항 [1.1]에서 구한 방정식에 문항 [1.2]와 [1.3]의 아이디어를 결합하여 $\frac{1}{\alpha+1}$ 이 해가 되는 방정식을 구하고, 또 근과 계수의 관계를 활용하여 원하는 값을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

- [1.1] (1)에 따라서 $f(0) = f(1) = 0$ 이므로 $f(x) = x(x-1)g(x)$ 이고 $g(0) = 1$ 이다. (2)에 따라서 $f(-1) = 2g(-1) = 4$ 이므로 $g(-1) = 2$ 이고, (3)에 따라서

$$g(x) = (x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \dots + a_1(x+1) + 2$$

이다. 또 $f'(x) = (x-1)g(x) + xg(x) + x(x-1)g'(x)$ 이므로 (4)에 의하여

$$f'(-1) = -3g(-1) + 2g'(-1) = -6 + 2g'(-1) = -20$$

즉 $g'(-1) = -7$ 이다. 그런데

$$g'(x) = n(x+1)^{n-1} + \dots + 2a_2(x+1) + a_1$$

이므로 $g'(-1) = a_1 = -7$ 이다. 마지막으로

$$g(0) = 1 + a_{n-1} + \dots + a_2 - 7 + 2 = 1$$

이므로

$$a_{n-1} + \dots + a_2 = 5$$

이다. 따라서 차수가 가장 낮은 경우는 $n=3$ 이고 $a_2=5$, 즉

$$f(x) = x(x-1)[(x+1)^3 + 5(x+1)^2 - 7(x+1) + 2]$$

이다.

- [1.2] $Q(x) = P(x-1)$ 이라 하면 $Q(\alpha_i+1) = P(\alpha_i) = 0$ 이므로 α_i+1 은 $Q(x) = 0$ 의 근이다. 따라서 구하는 방정식은

$$a_n(x-1)^n + \dots + a_1(x-1) + a_0 = 0$$

이다.

[1.3] $R(x) = P\left(\frac{1}{x}\right)$ 이라 하면 $R\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) = P(\alpha_i) = 0$ 이므로 $\frac{1}{\alpha_i}$ 은

$$R(x) = a_n \frac{1}{x^n} + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{1}{x} + a_0 = 0$$

의 근이다. 따라서 구하는 n 차 방정식은

$$x^n R(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

이다.

[1.4] $f(0) = f(1) = 0$ 이므로 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ 이고 $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 는

$$g(x) = (x+1)^3 + 5(x+1)^2 - 7(x+1) + 2 = 0$$

의 근이다. [1.2]에 따라서 $\alpha_3 + 1, \alpha_4 + 1, \alpha_5 + 1$ 이 근이 되는 삼차방정식은

$$h(x) = g(x-1) = x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = 0$$

이고, [1.3]에 따라서 $\frac{1}{\alpha_3 + 1}, \frac{1}{\alpha_4 + 1}, \frac{1}{\alpha_5 + 1}$ 이 근이 되는 삼차방정식은

$$x^3 h\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^3 - 7x^2 + 5x + 1 = 0$$

이다. 따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 따라서

$$\frac{1}{\alpha_3 + 1} + \frac{1}{\alpha_4 + 1} + \frac{1}{\alpha_5 + 1} = \frac{7}{2}$$

이므로

$$\frac{1}{\alpha_1 + 1} + \frac{1}{\alpha_2 + 1} + \frac{1}{\alpha_3 + 1} + \frac{1}{\alpha_4 + 1} + \frac{1}{\alpha_5 + 1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 5$$

이다.

[문제 2]

1. 출제배경

고등학교 수학의 주요한 목표 중 하나는 정적분의 이해와 계산이다. 본 문제에서는 치환적분을 활용하여 정적분을 계산할 수 있는 능력을 갖추고 있는지, 정적분의 기하적 의미를 이해하고 있는지, 함수의 대칭성을 정적분 계산에 이용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 적절한 치환을 통해서 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

[2.2] 정적분이 나타내는 넓이와 급수가 나타내는 넓이를 비교하여, 부등식을 증명할 수 있는지 평가한다.

[2.3] 함수의 대칭성, 연쇄법칙을 활용하여 치환적분법에 적용할 수 있는지 평가한다.

[2.4] 함수의 대칭성과 [2.3]에서 구한 식을 활용하여 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] $x = \tan\theta$ 로 치환하면, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 이고, $\frac{dx}{d\theta} = \sec^2\theta$ 이므로,

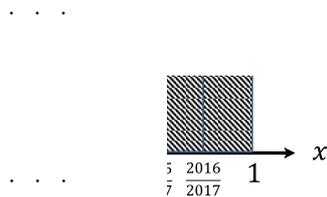
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} 1 d\theta = \frac{\pi}{4}$$

이다.

[2.2] 주어진 급수에서 분모와 분자를 2017²으로 나누면

$$\sum_{k=1}^{2017} \frac{8068}{2017^2 + k^2} = 4 \sum_{k=1}^{2017} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{2017}\right)^2} \frac{1}{2017}$$

이 된다. 이제 곡선 $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 를 생각하자. 구간 $[0,1]$ 을 2017등분한 후, k 번째 구간에서 높이가 $f\left(\frac{k}{2017}\right)$ 인 직사각형을 생각하자. 아래 그림과 같이



$\frac{1}{1+x^2}$ 이 구간 $[0,1]$ 에서 감소함수이므로, 직사각형들의 넓이의 합은 곡선 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 과 구간 $[0,1]$ 사이의 영역의 넓이보다 작다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{2017} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{2017}\right)^2} \frac{1}{2017} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

가 성립한다. 이제 [2.1]번에서

$$\sum_{k=1}^{2017} \frac{8068}{2017^2 + k^2} < 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

가 성립한다.

[2.3] 조건 (2)에 따라서 $f(\pi-x) = -f(x)$ 를 얻는다. 이 식의 양변을 x 로 미분하면 $-f'(\pi-x) = -f'(x)$ 이므로 $f'(\pi-x) = f'(x)$ 가 성립한다. 정적분 $\int_0^\pi \frac{xf'(x)}{1+f(x)^2} dx$ 에서 $x = \pi-t$ 로 치환하면

$$\int_0^\pi \frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2} dx = \int_\pi^0 \frac{(\pi-t)f'(\pi-t)}{1+\{f(\pi-t)\}^2} (-dt) = \int_0^\pi \frac{(\pi-t)f'(t)}{1+\{f(t)\}^2} dt$$

이다.

[2.4] [2.3]번의 풀이에서

$$\int_0^\pi \frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{f'(x)}{1+\{f(x)\}^2} dx$$

이다. 여기서 $u = f(x)$ 로 치환하여

$$\frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = \frac{\pi^2}{4}$$

을 얻는다.

[문제 3]

1. 출제배경

함수는 수학적 사고에서 가장 중요하고 기본적인 요소이다. 또한 순열과 조합은 썸의 기본적 요소이다. 함수의 이해능력과 특정 조건이 주어진 경우의 수들을 구할 수 있는지 확인하고자 하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

- [3.1] 합성함수의 정의를 이해하고, 합성함수를 정의할 수 있는 조건을 파악하고, 관련된 함수의 개수를 셀 수 있는지 평가한다.
 [3.2] 주어진 조건이 항등함수가 됨을 이해하는지 평가한다.
 [3.3] 주어진 조건이 중복조합과 관련됨을 이해하는지 평가한다.
 [3.4], [3.5] 합성함수가 일대일 함수가 되기 위한 조건을 이해하고 관련된 함수의 개수를 셀 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] ① $f(1) = 1$ 이므로 함수 f 의 개수는 $\{2, 3, \dots, k\}$ 에서 Y 로의 함수의 개수와 같다. 그러므로 n 개에서 중복을 허락하여 $k-1$ 개를 택하여 일렬로 나열하는 수 ${}_n\Pi_{k-1} = n^{k-1}$ 이다.

② 합성함수 $g \circ f$ 는 X 에서 X 로의 함수이므로 k 개에서 중복을 허락하여 k 개를 택하여 일렬로 나열하는 수 ${}_k\Pi_k = k^k$ 이다.

[3.2] 합성함수 $g \circ f$ 는 항등함수이므로 1가지이다.

[3.3] 조건을 만족하는 합성함수 $g \circ f$ 는 X 의 k 개의 수 $1, 2, \dots, k$ 에서 중복을 허락하여 k 개를 택한 후, 그 k 개의 수를 작은 것부터 크기순으로 일렬로 나열하고 차례로 $(g \circ f)(1), (g \circ f)(2), \dots, (g \circ f)(k)$ 에 대응시키면 된다. 따라서 합성함수 $g \circ f$ 의 개수는 k 개에서 중복을 허락하여 k 개를 택하는 조합인 중복조합의 수 ${}_kH_k$ (또는 ${}_{2k-1}C_k = \frac{(2k-1)!}{(k-1)!k!}$)이다.

[3.4] f 는 일대일 함수이어야 한다. 일대일함수 f 의 개수는 n 개에서 k 개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수 ${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ 이다.

[3.5] 함수 g 는 $f(X)$ 에서 X 로는 일대일로 대응되어야 하고, $Y-f(X)$ 에서 X 로는 어떠한 값이라도 대응되면 된다. 함수 f 는 일대일 함수이고 $f(X)$ 의 원소의 개수는 k 이므로 $f(X)$ 에서 X 로의 일대일로 대응시키는 방법은 ${}_kP_k = k!$ 가지이다. 또한, $Y-f(X)$ 에서 X 로 함수의 조건을 만족하며 대응시키는 방법은 ${}_k\Pi_{n-k} = k^{n-k}$ 가지이다. 그러므로 함수 g 의 개수는

$${}_kP_k \times {}_k\Pi_{n-k} = k! \times k^{n-k}$$

이다.