〈자연계열〉 문제지

학 교 명	
성 명	
주민번호	-

2017학년도
수시모집 논술전형 모의고사

□ 문제수 및 고사 시간

문제수	시 간	배점비율
3	100분	[문제 1]은 총 점수의 34%, [문제 2], [문제 3]은 각각 33%

□ 수험생 유의사항

- 답안지에 고교명, 성명, 주민번호 7자리를 정확히 명기
- 계산기와 통신기기 등은 휴대할 수 없으며, 휴대 시 부정행위자로 처리
- 답안지는 1매만 사용해야 하며, 2매 사용 시 무효(0점) 처리
- 반드시 <u>검은색 필기구</u>만 사용
  (볼펜, 사인펜 사용가능. **<u>연필, 샤프, 수정액, 수정테이프 사용 불가</u>**)
- 문제지의 여백은 연습장으로 활용 가능
- **답안지를 수정할 경우 <u>두 줄을 그어</u> 수정**
  - **답안 작성 시 <u>0점</u> 처리 기준**
    - 답안지에 답 이외의 특정 표기나 자신의 신원을 드러내는 표시를 한 경우
    - 검은색 필기구로 작성하지 않은 경우
    - 수정이 가능한 연필류 등으로 작성한 경우
    - 수정액 또는 수정테이프를 사용하여 수정한 경우
    - 답안지의 <u>지정된 범위를 벗어나 답안을 작성</u>한 경우

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(34점)

(가) 함수의 극한값 계산

극한 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$이 존재하고 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이면 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이다.

(나) 인수정리

x에 대한 다항식 $P(x)$에 대하여 $x-a$가 $P(x)$의 인수일 필요충분조건은 $P(a)=0$이다.

(다) 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}, \qquad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

[1.1] 다음 조건을 모두 만족하는 다항식 $f(x)$중에서 차수가 가장 낮은 것을 구하시오.(12점)

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x(x-1)} = 1$이고 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x(x-1)}$가 존재한다.

(2) $f(-1)=4$

(3) 최고차항의 계수는 1이다.

(4) $f'(-1)=-20$

[1.2] n차 방정식 $P(x)=a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$의 근이 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$일 때 $\alpha_1+1, \cdots, \alpha_n+1$을 근으로 갖는 n차 방정식을 구하시오.(8점)

[1.3] n차 방정식 $P(x)=a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ (단, $a_0 \neq 0$)의 근이 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$일 때 $\frac{1}{\alpha_1}, \cdots, \frac{1}{\alpha_n}$을 근으로 갖는 n차 방정식을 구하시오.(8점)

[1.4] 위의 [1.1]에서 구한 $f(x)$가 n차 다항식이고 $f(x)=0$의 근이 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$일 때, [1.2]와 [1.3]을 이용하여 다음 값을 구하시오.(6점)

$$\frac{1}{\alpha_1+1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n+1}$$

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(33점)

(가) 정적분과 넓이

구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a, x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 할 때, 구간 $[a,b]$에서 $f(x) \geq 0$이면

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

(나) 정적분의 치환적분법

구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여, 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 연속이고, $a=g(\alpha), b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

[2.1] 다음 정적분을 구하시오.(8점)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

[2.2] 다음 부등식이 성립함을 보이시오.(8점)

$$\sum_{k=1}^{2017} \frac{8068}{2017^2+k^2} < \pi$$

[2.3] 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 성질을 만족한다.

(1) $f'(x)$는 연속함수이다.

(2) $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

이때, 다음 등식이 성립함을 보이시오.(9점)

$$\int_0^\pi \frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-t)f'(t)}{1+\{f(t)\}^2}dt$$

[2.4] 위의 [2.3]의 조건을 만족하는 함수 $f(x)$가 $f(0)=-1, f(\pi)=1$인 증가함수일 때, 다음 정적분을 구하시오.(8점)

$$\int_0^\pi \frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx$$

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(33점)

(가) 일대일함수

함수 $f: X \rightarrow Y$의 정의역 X의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립할 때, 함수 f를 일대일함수라고 한다.

(나) 합성함수

두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$에 대하여 X의 각 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 이 대응은 X에서 Z로의 함수이다. 이를 f와 g의 합성함수라고 하고 $g \circ f$로 나타낸다.

(다) 순열과 조합

ㄱ. 서로 다른 n개에서 r개를 택해서 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라고 하고, 그 수는 ${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0 \leq r \leq n$)이다.

ㄴ. 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택해서 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 중복순열이라고 하고, 그 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$이다.

ㄷ. 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라고 하고, 그 수는 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ (단, $0 \leq r \leq n$)이다.

ㄹ. 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 n개에서 r개를 택하는 중복조합이라고 하고, 그 수는 ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이다.

$X = \{1, 2, 3, \cdots, k\}$, $Y = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ (단, k, n은 자연수이고, $k < n$)일 때, f는 X에서 Y로의 함수이고, g는 Y에서 X로의 함수이다.

[3.1] $f(1) = 1$을 만족하는 함수 f와 합성함수 $g \circ f$의 개수를 구하시오.(8점)

[3.2] 모든 $i, j \in X$에 대하여, $i < j$이면 $(g \circ f)(i) < (g \circ f)(j)$를 만족하는 합성함수 $g \circ f$의 개수를 구하시오.(6점)

[3.3] 모든 $i, j \in X$에 대하여, $i < j$이면 $(g \circ f)(i) \leq (g \circ f)(j)$를 만족하는 합성함수 $g \circ f$의 개수를 구하시오.(6점)

[3.4] 합성함수 $g \circ f$가 일대일함수일 때, 함수 f의 개수를 구하시오.(6점)

[3.5] 주어진 일대일함수 f에 대하여, 합성함수 $g \circ f$가 일대일함수가 되도록 하는 함수 g의 개수를 구하시오.(7점)