# 〈자연계열〉

# 2016학년도 논술전형
# 모의고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

# [문제 1]

## 1. 출제배경

고등학교 수학의 주요한 목표 중 하나는 이차곡선(원추곡선)의 이해이다. 이 문항에서는 이차곡선 중 하나인 포물선에 대한 질문으로 포물선의 기본적인 성질을 알고 있는지 확인하고, 이를 바탕으로 방정식의 풀이, 정적분을 활용한 넓이 구하기 등을 수행할 수 있는지 확인하고자 하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 포물선의 방정식으로부터 초점과 준선의 방정식을 찾을 수 있는지 확인하고, 평행이동 개념을 정확히 이해하고 있는지 평가한다.

[1.2] 포물선과 직선의 교점을 2차 방정식을 풀어서 구할 수 있는지 평가한다.

[1.3] 정적분을 활용하여 포물선과 직선 사이 영역의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다. 이 정적분의 값을 2차 방정식의 근과 계수와의 관계를 통하면 쉽게 계산할 수 있음에 착안할 수 있는지 평가한다. 근의 공식으로부터 직접 계산하는 경우에는 기본적인 계산능력을 갖추고 있는지 평가한다.

## 2. 예시답안 및 해설

[1.1] 완전 제곱식으로 변형하면 $y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$이므로 주어진 포물선은 포물선 $y=x^2$을 $x$축으로 $-\frac{1}{2}$만큼 $y$축으로 $\frac{3}{4}$만큼 평행이동한 포물선이다. 포물선 $y=x^2$의 초점이 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$이고, 준선은 $y=-\frac{1}{4}$이므로 주어진 포물선의 초점과 준선은 각기 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$과 $y=\frac{1}{2}$이다.

[1.2] $\alpha,\beta$는 방정식 $x^2+x-2014=0$의 해이므로 $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=-2014$를 만족한다. 따라서

$$(\beta-\alpha)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8057$$

이 된다. 이로부터 $\beta-\alpha=\sqrt{8057}$이 된다.

(별해) 근의 공식을 이용하면 위 방정식의 두 근이 $\frac{-1\pm\sqrt{8057}}{2}$이 되므로 이로부터 $\beta-\alpha=\sqrt{8057}$이다.

[1.3] 교점이 $(\alpha,2015),(\beta,2015)$이므로 구하는 넓이는

$$\int_\alpha^\beta (2015-(x^2+x+1))dx = 2014(\beta-\alpha)-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$$

이 된다. 여기서

$$\beta^3-\alpha^3=(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)=(\beta-\alpha)((\alpha+\beta)^2-\alpha\beta)=\sqrt{8057}(1+2014)$$

이고,

$$\beta^2-\alpha^2=(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)=-\sqrt{8057}$$

이다. 따라서 구하는 넓이는

$$\left(2014-\frac{2015}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{8057}=\frac{8057}{6}\sqrt{8057}$$

이다.

(별해) $\alpha = \dfrac{-1-\sqrt{8057}}{2}, \beta = \dfrac{-1+\sqrt{8057}}{2}$ 임을 이용하여 직접 계산할 수도 있다.

(별해) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(2015-(x^2+x+1))dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{8057}{6}\sqrt{8057}$ 로 계산할 수도 있다.

## 3. 출제근거

「좌표평면 위의 두 점 사이의 거리」, 『수학』(고등학교 교과서), 미래엔, 2013, 178-181쪽.
「평행이동」, 『수학』(고등학교 교과서), 미래엔, 2013, 230-232쪽.
「근과 계수와의 관계」, 『수학』(고등학교 교과서), 미래엔, 2013, 131-135쪽.
「정적분」, 『적분과 통계』(고등학교 교과서), 교학사, 2013, 33-35쪽.
「포물선의 방정식」, 『기하와 벡터』(고등학교 교과서), 교학사, 2013, 35-38쪽.

# [문제 2]

## 1. 출제배경

이 문제는 현상을 설명하는 내용을 이해하고 이를 수학적 언어로 서술하고 수학 개념을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다. 또한 일상생활에서 직면하는 여러 가지 문제를 수학적으로 해결하는 능력을 물어보는 문제이다. 여기에 사용된 수학적 개념은 제시문에 주어진 것과 같이 고등학생이면 누구나 알고 있는 간단한 내용이다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

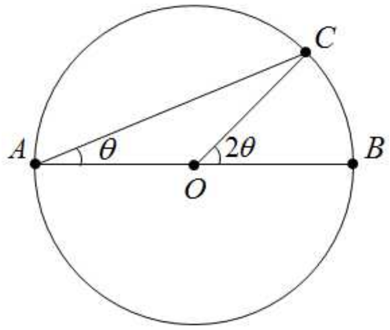
[2.1] 삼각형과 원에 관한 기본 성질을 이용하여 원하는 거리를 나타낼 수 있는지 평가한다.

[2.2] '거리 = 시간 × 속력'공식을 이용하여 주어진 지점까지 도달하는데 걸리는 시간을 함수로 나타낼 수 있는지를 평가한다. 따라서 수학적 표현 능력을 평가한다.

[2.3] 속력으로 나타낸 함수의 최대, 최소와 관련된 문제는 흔히 주어진 함수가 최댓값(또는 최솟값)을 나타내는 순간과 최댓값(또는 최솟값)을 구하는 형태이다. 그러나 이 문제에서는 역으로 최댓값을 나타내는 순간을 알 때 속력을 구하는 문제이다. 따라서 제시문에 주어진 극값을 가질 필요조건을 활용할 수 있는지를 평가한다.

## 2. 예시답안 및 해설

[2.1]




삼각형 $ABC$는 직각삼각형이므로

$$AC = AB\cos\theta = 2\cos\theta$$

이다. 호 $CB$의 중심각은 $2\theta$이므로

$$\text{호}BC = 2\theta$$

이다.

[2.2] 시간 $= \dfrac{\text{거리}}{\text{속력}}$ 이므로 $A$에서 $C$까지 배를 타고 가는데 걸리는 시간은 $\dfrac{2\cos\theta}{v_1}$이고, $C$에서 $B$까지 뛰어서 가는데 걸리는 시간은 $\dfrac{2\theta}{v_2}$이다. 따라서 $A$에서 $B$까지 가는데 걸리는 시간은

$$f(\theta) = \frac{2\cos\theta}{v_1} + \frac{2\theta}{v_2}$$

이다.

[2.3] $f(\theta)$를 미분하면

$$f'(\theta) = -\frac{2\sin\theta}{v_1} + \frac{2}{v_2}$$

이다. $\theta = \dfrac{\pi}{6}$일 때 $f(\theta)$가 극값을 가지려면

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2} = 0$$

이어야 하므로 $v_2 = 2v_1$이다. 이때

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{2\sin\theta}{v_1}\bigg|_{\theta=\pi/6} = -\frac{1}{v_1} < 0$$

이므로 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$는 최댓값이다. 그리고 $v_1 = 5$일 때 $v_2 = 10$이다.

## 3. 출제근거

「일반각과 호도법」, 『수학』(고등학교 교과서), 교학사, 2013, 251-255쪽.
「삼각함수」, 『수학』(고등학교 교과서), 교학사, 2013, 256-258쪽.
「여러 가지 함수의 미분법」, 『수학II』(고등학교 교과서), 교학사, 2013, 131-137쪽.
「함수의 증가, 감소와 극대, 극소」, 『수학II』(고등학교 교과서), 교학사, 2013, 147-153쪽.

# [문제 3]

## 1. 출제배경

구와 평면은 공간도형에서 가장 기본이 되는 것으로 구와 평면사이의 관계에 대한 공간지각능력을 수학적으로 기술할 수 있는지 평가하고자 하였다. 벡터의 내적을 활용하여 두 평면의 수직관계를 기술할 수 있는지, 공간에서 피타고라스 정리를 활용할 수 있는지 등 기본적인 수학 개념을 활용하여 공간 상의 기하학 문제를 해결할 수 있는 논리적 사고력을 평가한다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 점과 평면사이의 거리 공식을 활용할 수 있는지와 법선 벡터로부터 평면의 방정식을 유도할 수

있는지 평가한다.

[3.2] 구하는 원의 반지름을 피타고라스 정리를 이용하여 구할 수 있는 공간지각능력을 갖추고 있는지 평가한다.

[3.3] 문제의 조건으로부터 구하는 평면의 법선 벡터와 지나는 점을 찾을 수 있는 논리적 추론능력과 공간지각능력을 갖추고 있는지 평가한다.

## 2. 예시답안 및 해설

[3.1] 평면 $T$의 방정식을 $x+y+z=d$라고 하면 점과 평면 사이의 거리 공식에 의하여 $\frac{|d|}{\sqrt{3}}=3$이므로 $d=\pm 3\sqrt{3}$이 된다. 따라서 $x+y+z=\pm 3\sqrt{3}$이다.

[3.2] 구와 평면이 만나서 생기는 원의 반지름을 $r$이라 하면 $3^2+r^2=4^2$를 만족해야 하므로 $r=\sqrt{7}$이다. 따라서 구하는 원의 넓이는 $7\pi$가 된다.

[3.3] 구하는 평면은 평면 $T$에 수직하고 원점을 지난다. 따라서 $d=0$이다. 또한 구하는 평면의 법선 벡터 $(a,b,c)$는 $(1,1,1)$에 수직하므로 $a+b+c=0$을 만족한다. 이제

$$|a|+|b|+|c|+|d|=|a|+|b|+|-a-b|=|a|+|b|+|a+b|$$

를 최소로 하기 위해서는 $(a,b,c)\neq(0,0,0)$이므로,

$$(a,b,c)=(\pm 1,\mp 1,0),\ (a,b,c)=(0,\pm 1,\mp 1),\ (a,b,c)=(\pm 1,0,\mp 1)$$

이 되어야한다. 따라서 구하는 평면의 방정식은 $x=y, y=z, x=z$이다.

## 3. 출제근거

「좌표평면 위의 두 점 사이의 거리」, 『수학』(고등학교 교과서), 미래엔, 2013, 78-181쪽.
「벡터의 내적」, 『기하와 벡터』(고등학교 교과서), 교학사, 2013, 139-147쪽.
「평면의 방정식」, 『기하와 벡터』(고등학교 교과서), 교학사, 2013, 158-165쪽.

# [문제 4]

## 1. 출제배경

수학의 모든 성질은 엄밀한 방법으로 증명되어야 한다. 그처럼 이 문제는 학생들이 증명을 위한 논리적인 사고가 되어있는지를 평가한다. 제시문 (가)와 (나)는 수열에 관한 기본적인 성질이고, 제시문 (다)는 연속성에 관한 성질이다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[4.1] 학생들 대부분이 기억하고 활용할 수 있는 등비수열의 합 공식을 증명할 수 있는지를 평가한다. 공식을 활용할 줄 아는 것도 필요하지만 왜 그런 공식이 성립하는지를 이해하는 것도 중요한 평가요소이다.

[4.2] 연속함수의 성질과 극한의 성질을 이용하여 주어진 극한을 계산하는 문제이다. 제시문에서 주어진 성질들이 증명의 어느 단계에서 이용되는지를 정확하게 설명할 수 있어야 한다.

[4.3] 주어진 관계식을 만족하는 함수를 찾는 문제로 약간의 수학적 직관이 필요하다. [4.2]에서 묻는 내용을 생각하면 이 문제의 풀이 방향에 대한 힌트를 얻을 수 있다. 이러한 수학적 직관을 엄밀

한 방법으로 입증할 수 있는지를 평가한다.

## 2. 예시답안 및 해설

[4.1] $S=1+r+r^2+\cdots+r^n$이라 하고 양 변에 $r$을 곱하면

$$rS=r+r^2+r^3+\cdots+r^{n+1}$$

이다. 위의 두 식을 빼면

$$(1-r)S=1-r^{n+1}$$

이다. 그런데 $r\neq 1$이므로

$$S=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

이다.

[4.2] $0<a<1$이므로 제시문 (가)와 (나)에 의하여

$$\lim_{t\to\infty}(a^{t+1}x)=x\lim_{t\to\infty}a^{t+1}=0$$

이다. 그런데 함수 $f$가 $x=0$에서 연속이므로 제시문 (다)에 의하여

$$\lim_{t\to\infty}f(a^{t+1}x)=f\left(\lim_{t\to\infty}a^{t+1}x\right)=f(0)$$

이다. 또 제시문 (나)에 의하여

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t=0$$

이다. 따라서 제시문 (가)에 의하여

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t f(a^{t+1}x)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}f(a^{t+1}x)=0$$

이다.

[4.3] $i=0,1,\ldots,n$에 대하여 $a^ix$를 주어진 식에 대입하면

$$2f(x)-f(ax)=x^2+x+1$$
$$2f(ax)-f(a^2x)=a^2x^2+ax+1$$
$$2f(a^2x)-f(a^3x)=a^4x^2+a^2x+1$$
$$\cdots$$
$$2f(a^nx)-f(a^{n+1}x)=a^{2n}x^2+a^nx+1$$

이다. 두 번째 식의 양 변에 $\frac{1}{2}$, 세 번째 식의 양 변에 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, 마지막 식의 양 변에 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$을 곱하면

$$2f(x)-f(ax)=x^2+x+1$$
$$f(ax)-\frac{1}{2}f(a^2x)=\frac{a^2}{2}x^2+\frac{a}{2}x+\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}f(a^2x)-\left(\frac{1}{2}\right)^2f(a^3x)=\left(\frac{a^2}{2}\right)^2x^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2x+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\cdots$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}f(a^nx)-\left(\frac{1}{2}\right)^nf(a^{n+1}x)=\left(\frac{a^2}{2}\right)^nx^2+\left(\frac{a}{2}\right)^nx+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이다. 이 식을 모두 더하면

$$2f(x)-\left(\frac{1}{2}\right)^n f(a^{n+1}x)=\left[1+\frac{a^2}{2}+\left(\frac{a^2}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n\right]x^2$$
$$+\left[1+\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a}{2}\right)^n\right]x+\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$
$$=\frac{1-(a^2/2)^{n+1}}{1-a^2/2}x^2+\frac{1-(a/2)^{n+1}}{1-a/2}x+\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}$$

이다. 이제 $n\to\infty$ 이면 [4.2]에 의하여

$$f(x)=\frac{1}{2-a^2}x^2+\frac{1}{2-a}x+1$$

이다.

## 3. 출제근거

「등비수열」, 『수학I』(고등학교 교과서), 교학사, 2013, 113-117쪽.
「함수의 극한에 관한 성질」, 『수학II』(고등학교 교과서), 교학사, 2013, 75-79쪽.
「여러 가지 함수의 극한」, 『수학II』(고등학교 교과서), 교학사, 2013, 80-87쪽.
「함수의 연속」, 『수학II』(고등학교 교과서), 교학사, 2013, 90-93쪽.