〈자연계열〉 문제지

	모집단위	
	성 명	
	수험번호	

SEOULTECH

2015학년도
수시모집 논술전형고사

□ 문제수 및 고사 시간

문제수	시 간	배점비율
4	10:00~11:40(100분)	각 문제당 총 점수의 25%

□ 수험생 유의사항

- 답안지에 모집단위, 성명, 수험번호, 주민번호를 정확히 명기
- 계산기와 통신기기 등은 휴대할 수 없으며, 휴대 시 부정행위자로 처리
- 답안지는 1매만 사용해야 하며, 2매 사용 시 무효(0점) 처리
- 반드시 검은색 필기구만 사용
  (볼펜, 사인펜 사용가능. **연필, 샤프, 수정액, 수정테이프 사용불가**)
- 문제지의 여백은 연습장으로 활용 가능
- **답안지를 수정할 경우 두 줄을 그어 수정**
- **답안 작성 시 0점 처리 기준**
  - 답안지에 답 이외의 특정 표기나 자신의 신원을 드러내는 표시를 한 경우
  - 검은색 필기구로 작성하지 않은 경우
  - 수정이 가능한 연필류 등으로 작성한 경우
  - 수정액 또는 수정테이프를 사용하여 수정한 경우
  - 답안지의 지정된 범위를 벗어나 답안을 작성한 경우

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 매개변수로 나타낸 곡선의 길이

두 함수 $f(t)$, $g(t)$의 도함수 $f'(t)$, $g'(t)$가 모두 구간 (α,β)에서 연속일 때, 매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$의 길이 l은

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt$$

(나) 삼각함수의 반각공식

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},\qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$

(다) 정적분의 치환적분법

구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여, 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\beta]$에서 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

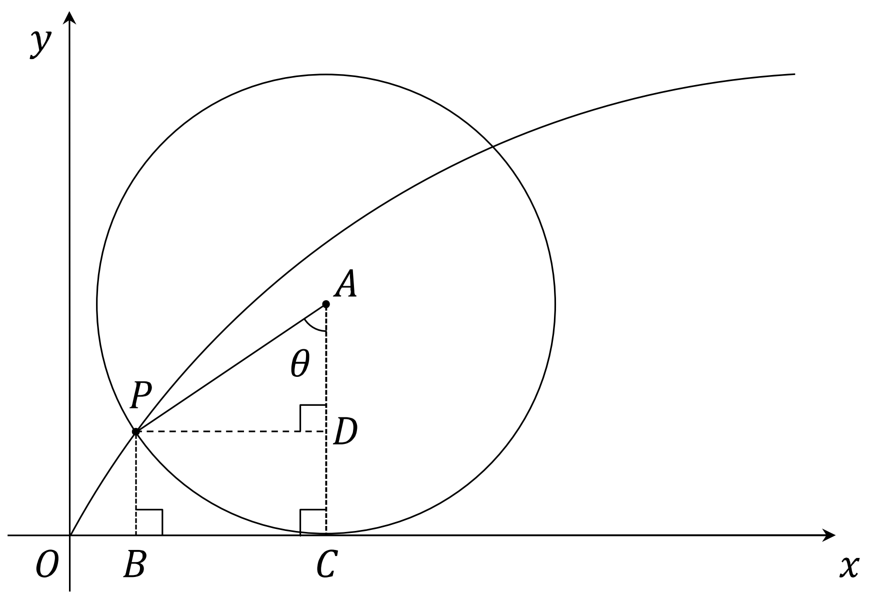
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\,dt$$

(라) 정적분의 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

[1.1] 반지름의 길이가 2인 원이 왼쪽에서 오른쪽으로 굴러갈 때, 원 위의 한 점이 그리는 자취의 방정식을 사이클로이드라 한다. 다음은 원점 O에서 출발한 점 P가 그리는 사이클로이드의 방정식을 원이 회전하는 각 θ $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, 단위는 라디안)를 매개변수로 하여 나타내는 과정이다. 아래 그림을 참고하여 $\boxed{}$ 안에 들어갈 수식 또는 값을 구하시오.



중심이 A이고 반지름의 길이가 2인 원이 x축 위를 θ만큼 굴러가면 원점 O에서 출발한 점 P의 위치는 위의 그림과 같다. 점 P의 좌표를 (x,y)라 하면

$$x = \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{BC}$$

이다. 여기서 $\overline{OC}$와 $\overline{BC}$를 θ를 이용하여 나타내 보자. 원이 x축 위를 굴러가면 $\overline{OC} = \widehat{PC}$이므로 $\overline{OC} = \boxed{\text{(가)}}$이고, $\triangle APD$에서 $\overline{BC} = \overline{PD} = \boxed{\text{(나)}}$이다. 따라서

$$x = \boxed{\text{(다)}}$$

이다. 또

$$y = \overline{PB} = \overline{AC} - \overline{AD} = 2 - \overline{AD}$$

인데, $\triangle APD$에서 $\overline{AD} = \boxed{\text{(라)}}$이다. 따라서

$$y = \boxed{\text{(마)}}$$

이다.

[1.2] 문항 [1.1]에서는 편의상 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$로 제한하였으나, $\theta \ge \dfrac{\pi}{2}$일 때도 같은 방법으로 구하면 문항 [1.1]에서 구한 방정식과 같다. 특히, $0 \le \theta \le 2\pi$일 때 사이클로이드 곡선 하나가 생기고 이후에는 같은 모양이 반복된다. 사이클로이드 곡선 하나의 길이를 구하시오.

[1.3] 자연수 k에 대하여, x축 구간 $[4(k-1)\pi, 4k\pi]$에서 사이클로이드와 x축 사이의 영역을 A_k라 하자. x좌표가 x인 점에서 밀도가 $\rho(x) = x$로 주어졌을 때, 영역 A_k의 질량 m_k는

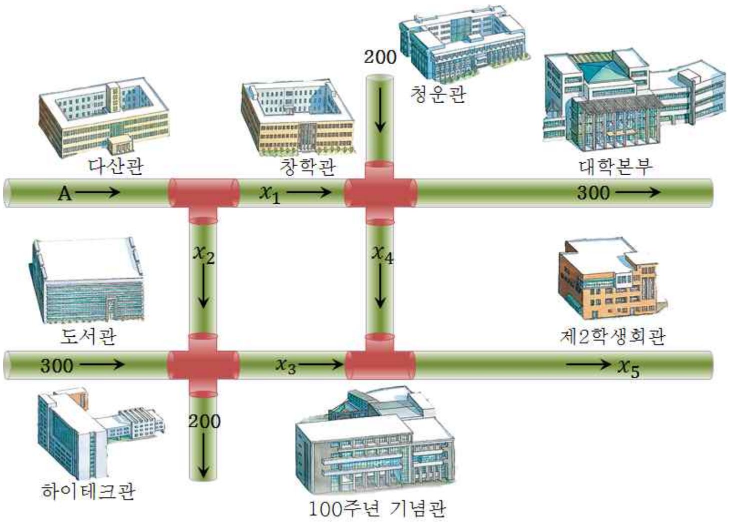
$$m_k = \int_{4(k-1)\pi}^{4k\pi} xy\, dx$$

이다. 이때 정적분 m_k를 계산하고, 이를 이용하여 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k\, m_k$를 구하시오.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 캠퍼스 지도

다음은 서울과학기술대학교 캠퍼스 내 몇몇 건물과 그 지하 하수관을 통해서 흐르는 시간당 물의 양을 나타낸 그림이다.



(나) 정규분포

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 두 상수 $m, \sigma\,(\sigma > 0)$에 대하여

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

일 때, X의 확률분포를 정규분포라고 한다. 이때 평균은 m, 분산은 σ^2이고, 이 정규분포를 $N(m, \sigma^2)$으로 나타낸다. 특히, 평균과 분산이 각각 0, 1인 정규분포를 표준정규분포라고 한다.

[2.1] 다산관 지하로 들어오는 시간당 물의 양(A)이 400일 때, 제2학생회관 방향으로 흐르는 시간당 물의 양(x_5)을 구하시오.

[2.2] 하수관으로 한계 용량 이상의 물이 들어오면 역류한다. 기숙사 신축으로 물 사용량이 증가하여 하수관이 역류하는 것을 막고자 창학관 앞 지하 배관 교차점에서 100주년 기념관 방향으로 이어진 하수관을 교체할 계획이다. 조사 결과 기숙사 신축 이후 다산관 지하 방향으로 들어오는 시간당 물의 양(A)은 평균 500, 표준편차 10인 정규분포를 따를 것으로 예상된다. 창학관에서 100주년 기념관 방향으로 흐르는 시간당 물의 양(x_4)이 최대가 되는 경우에도 99% 확률로 역류가 일어나지 않도록 설계하고자 한다. 새로운 하수관의 한계 용량은 최소 얼마가 되어야 하는지 구하시오. 확률변수 Z가 표준정규분포를 따를 때, 아래 확률값이 필요하면 이용하시오.

$P(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$, $\quad P(0 \le Z \le 2.33) = 0.490$

$P(0 \le Z \le 2.58) = 0.495$, $\quad P(Z \ge 10) = 0$

[2.3] 하수관 교체 공사 후 하수관을 다시 열었을 때, 처음 10시간 동안 창학관에서 100주년 기념관 방향으로 흐르는 시간당 물의 양(x_4)이

$$f(t) = 200\frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1+t}} \quad (0 \le t \le 10,\ t\text{의 단위는 시간})$$

으로 주어진다. A가 500으로 일정할 때, x_4가 최대가 되는 때는 몇 시간 후인지 구하고, 이때 다산관에서 하이테크관 방향으로 흐르는 시간당 물의 양(x_2)을 구하시오.

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 스칼라량은 크기만 갖는 물리량이고, 벡터량은 크기와 방향을 모두 갖는 물리량이다. 에너지는 스칼라량, 힘은 벡터량에 해당한다. 가령, 이차원에서 힘 $\vec{F}$를 성분별로 표현하면 $\vec{F}=(F_x, F_y)$이고, 크기는 $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}$, 방향은 $\tan\theta=\dfrac{F_y}{F_x}$ 이다. 여기서 θ는 x축으로부터의 벡터 각도이다. 만약 두 힘 $\vec{F_1}=(F_{1x}, F_{1y})$와 $\vec{F_2}=(F_{2x}, F_{2y})$의 합력 $\vec{F}$를 구한다면, 성분별로 더해 $\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}=(F_{1x}+F_{2x}, F_{1y}+F_{2y})$로 표현할 수 있다.

(나) 물체의 질량이 m이고 속력이 v일 때, 물체가 갖는 운동에너지는 $K=\dfrac{1}{2}mv^2$이다. 역학적 에너지는 운동에너지 K와 위치에너지 U의 합으로 정의한다. 임의의 두 지점에서 입자가 갖는 역학적 에너지의 값이 일정할 때, 역학적 에너지는 보존된다. 즉, 처음 상태(i)와 나중 상태(f)에서 갖는 역학적 에너지의 차이는

$$\triangle K+\triangle U=(K_f-K_i)+(U_f-U_i)=0$$

이다. 역학적 에너지가 보존되도록 작용하는 힘을 보존력이라 부르며, 중력·전기력·자기력과 용수철에 작용하는 탄성력 등은 모두 보존력에 해당한다. 일차원에서 보존력 $F(x)$와 위치에너지 $U(x)$ 사이의 관계는 $F(x)=-\dfrac{dU(x)}{dx}$ 이다.

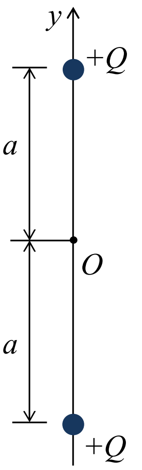
(다) 전하량이 각각 Q와 q인 두 점전하가 거리 x만큼 떨어져 있을 때, 전하 사이에 작용하는 전기력의 크기는 $F=k\dfrac{|Q||q|}{x^2}$이다. 여기서 점전하는 크기를 무시할 수 있는 전하를 의미하며, k는 쿨롱 상수이다.

(라) 점전하 Q에서 x만큼 떨어진 점에 점전하 q가 위치할 때, 점전하 q가 갖는 전기적 위치에너지는 $U=k\dfrac{Qq}{x}$로 표현된다. 이는 무한대에 위치해 있던 점전하 q를 점전하 Q로부터 x만큼 떨어진 점까지 전기력을 거슬러 이동시키면서 해준 일과 같다. 점전하 q가 점전하 Q로부터 무한대로 떨어져 있다면, 일반적으로 전기적 위치에너지는 0으로 한다. 또한 점전하 q주위에 여러 점전하 Q_i가 있는 경우, 점전하 q가 갖는 위치에너지는 각각의 점전하 Q_i에 의한 위치에너지 U_i의 합($U=\sum_i U_i$)과 같다.

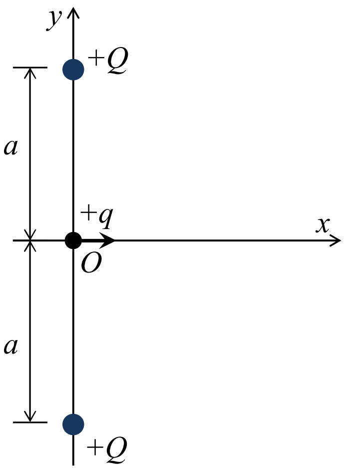
(마) 수평이며 마찰이 없는 면 위에 놓인 용수철에 연결된 물체를 생각하자. 용수철이 늘어나지 않은 상태, 즉 평형상태에서 작은 거리 x만큼 늘어났거나 줄어들었을 때 물체가 가지는 탄성 위치에너지는 $U=\dfrac{1}{2}k_s x^2$이다. 여기서 k_s는 용수철 상수이다. 용수철이 물체에 작용하는 힘은 제시문 (나)에 의하면 $F=-\dfrac{dU}{dx}=-k_s x$이다. 이러한 용수철의 탄성력은 항상 평형 위치($x=0$)를 향하므로 복원력이라고도 한다. 이 이유는 물체가 평형점($x=0$)의 오른쪽으로 변위되었을 때 복원력은 왼쪽으로 향하고, 물체가 평형점의 왼쪽으로 변위되었을 때 복원력은 오른쪽으로 향하기 때문이다. 따라서 탄성력의 방향은 항상 평형 위치를 향하므로 용수철에 매달린 물체는 평형점 부근에서 주기적으로 왕복하는 운동을 한다.

※ [3.1]-[3.5] 문항 모두 연결된 문제임을 유의하시오.
※ 문제에 주어진 기호로만 답을 하고, 물리상수는 제시문과 본 문제에 주어진 상수기호를 이용하시오.
※ 중력과 마찰력은 고려하지 않는다.

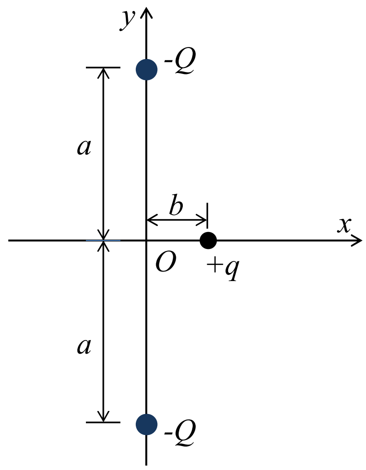
아래 그림처럼 원점 O에서 a만큼 떨어진 y축 상의 두 지점에 점전하 $+Q$ 또는 $-Q$가 고정되어 있다. 이들 사이에 질량이 m이고 전하량이 $+q$인 점전하를 둘 때, 다음 물음에 답하시오. (전하량 Q, q는 모두 양수)



<그림 1>



<그림 2>



<그림 3>

[3.1], [3.2]는 <그림 1>을 참조하시오.

[3.1] <그림 1>에서 점전하 q를 y축 상에 있는 두 양전하($+Q$) 사이에 둔다면, 점전하 $+q$의 전기적 위치에너지가 최소인 점은 어디이며, 그 값은 어떻게 되는가? 또 그 지점에서 점전하 $+q$에 작용하는 외력의 합은 얼마인가?

[3.2] 문항 [3.1]에서 구한 위치에너지가 최소인 점에서 점전하 $+q$를 양의 y축 방향으로 a에 비해 작은 거리만큼 아주 천천히 변위시켜 정지 상태에 두었을 때, 점전하 $+q$는 어떤 운동을 할지 서술하시오.

[3.3]은 <그림 2>를 참조하시오.

[3.3] <그림 2>에서 원점 O에 놓여 있는 점전하 $+q$를 양의 x축 방향으로 아주 살짝 변위시켜 정지 상태에 두면 점전하는 계속해서 움직여 무한대로 간다. 무한대에서 점전하 $+q$의 속력은 얼마인가?

[3.4], [3.5]는 <그림 3>을 참조하시오.

[3.4] <그림 3>에서 점전하 $+q$를 양의 x축 방향으로 작은 거리 b만큼 아주 천천히 변위시켜 정지 상태에 두었을 때, 점전하 $+q$는 어떤 운동을 할지 서술하시오. (<그림 3>에서 $y=\pm a$에 고정된 점전하의 전하는 $-Q$임을 유의하시오)

[3.5] 문항 [3.4]의 상황에서 운동하는 점전하 $+q$가 원점 O에 도달할 때, 점전하 $+q$가 갖는 운동에너지는 얼마인가? 또 점전하 $+q$가 $x=-b$에 도달한다면, 이때 운동에너지는 얼마인가?

[문제 4] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 분자 또는 이온에서 중심원자를 둘러싸고 있는 전자쌍들은 모두 (-)전하를 띠고 있으므로 서로 반발하여 되도록 멀리 떨어져 안정된 상태로 변화하려 하는데, 이를 **전자쌍 반발 원리**라고 한다. 따라서 어떤 분자의 루이스 전자점식을 그린 후 아래 표를 참고하면, 분자 구조를 예측할 수 있다.

중심원자와 결합한 원자수	2	3	4	3	2
중심원자가 갖는 비공유 전자쌍수	0	0	0	1	2
분자 구조	직선형	평면삼각형	사면체	삼각뿔형	굽은형

(나) 여러 화학 반응은 산화-환원 반응이 동시에 진행되면서 이루어진다. 산화-환원은 산소 원자 또는 전자의 제공 여부에 따라 달리 정의할 수 있다. 어떤 화학 반응에서 산소를 얻는 것 또는 어떤 물질이 전자를 잃는 것을 산화 반응이라 하고, 산소를 잃는 것 또는 전자를 얻는 것을 환원 반응이라 한다.

공유 결합 화합물의 경우, 전기 음성도 차이를 기준으로 반응 전과 반응 후의 전자 치우침을 비교하여 산화-환원 반응을 설명할 수 있다. 공유 결합에 참여하는 원자 중에서 전기 음성도가 큰 원자로 공유 결합 전자가 완전히 이동하였다고 가정할 때, 원자가 갖는 전하수를 산화수라고 한다. 산화수가 증가하면 산화 반응이며, 산화수가 감소하면 환원 반응이다.

(다) 산과 염기는 우리 생활 주변에서 널리 사용되고 있는 중요한 기초 화학 물질이다. 브뢴스테드는 산과 염기를 각각 수소 이온(H^+) **주게**(donor)와 수소 이온 **받게**(acceptor)로 정의하고, 짝산-짝염기 개념을 도입하였다. 아세트산(CH_3COOH)은 수용액에서 아래와 같이 이온화한다.

$$CH_3COOH\ (aq) + H_2O\ (l) \rightleftarrows CH_3COO^-\ (aq) + H_3O^+\ (aq)$$

이때 CH_3COOH와 CH_3COO^-, H_3O^+와 H_2O는 각각 짝산-짝염기의 관계이다. 또한, 산과 염기의 세기는 수소 이온을 주고받으려는 경향이 클수록 강해지는데, 이는 물질의 농도가 아니라 이온화도에 따라 달라지기 때문이다. 따라서, 강산의 짝염기는 약염기이고 약산의 짝염기는 강염기이다. 루이스는 비공유 전자쌍을 받는 물질이 산이고, 비공유 전자쌍을 주는 물질을 염기라고 정의하였고, 이는 주로 배위 공유 결합일 경우에 적용된다.

(라) 산소와 결합된 산화물은 염기성(대부분 금속원소의 산화물), 산성(일반적으로 비금속 원소의 산화물), 양쪽성 등으로 구분할 수 있다. 예를 들어, 금속성 산화물인 CaO는 아래와 같이 물 분자와 반응하여 수산화 이온이 생성되므로 CaO 산화물은 염기성이라고 한다.

$$CaO\ (s) + H_2O\ (l) \rightarrow Ca(OH)_2\ (aq)$$

또한, 아래 식과 같이 비금속 산화물은 물과 반응하여 수소이온을 포함한 염이 되므로 산성으로 구분한다.

$$SO_3\ (g) + H_2O\ (l) \rightarrow H_2SO_4\ (aq)$$

비금속 산화물의 산의 세기는 비금속 원소의 산화수가 클수록(산소 원자가 많을수록) 증가한다. 예를 들면, H_2SO_3보다 H_2SO_4가 강산이고, HClO보다 $HClO_4$가 강산이다. 이는 산의 세기가 산소 원자가 많을수록 수소 원자의 전자 밀도가 약하게 되는 결합 극성과 관련이 있기 때문이다. 이와 유사하게 산의 세기는 화합물을 구성하는 결합 세기나 원소 간 전기음성도의 차이와도 관련이 있다. 산성 또는 염기성 산화물들은 각각 염기 수용액이나 산 수용액과 중화 반응하여 물과 염을 생성하며, 산성 산화물과 염기성 산화물 간의 중화 반응으로 염이 생성되기도 한다.

※ 유의사항: 답안의 화학반응식을 작성할 때 물질의 상태 표시는 표기하지 말 것.

[4.1] 제시문 (가)와 (나)를 참조하여 물음에 답하시오.

[4.1.1] H_2O와 CO_2 분자의 전자점식을 그린 후, 전자쌍 반발 원리에 근거하여 분자 구조를 예측하고자 한다. 아래 빈칸을 채우시오.

	루이스 구조식	분자 구조
H_2O		
CO_2		

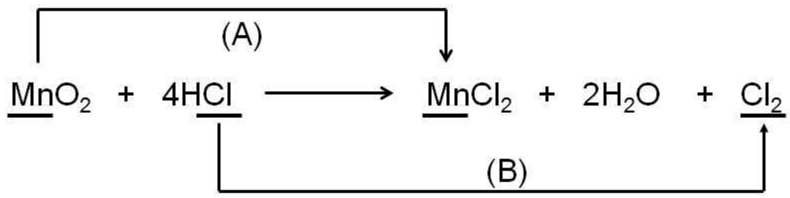
[4.1.2] 산소 원자가 관여하는 아래 반응에서 산화 반응과 환원 반응을 구분하여 적으시오.

$$CuO + H_2 \rightarrow Cu + H_2O$$

[4.1.3] 전자의 교환이 포함된 아래 반응에서 산화 반응과 환원 반응을 구분하여 적으시오. (단, 산화 반응식과 환원 반응식에는 전자의 양(개수)을 반드시 포함하시오)

$$Zn + Cu^{2+} \rightarrow Zn^{2+} + Cu$$

[4.1.4] 아래 산화-환원 반응에서 밑줄 친 Mn, Cl, 그리고 Cl_2의 산화수를 구하고, (A)와 (B)를 산화와 환원으로 나타내시오.



[4.2] 제시문 (다)와 (라)를 참조하여 물음에 답하시오.

[4.2.1] 마그네슘 옥사이드(MgO)와 물(H_2O)의 화학 반응식을 적으시오. 그리고 마그네슘 옥사이드에 들어있는 산소 이온(O^{2-})과 물의 반응식을 나타내고, 이를 통해 물 분자가 브뢴스테드의 산-염기 또는 루이스의 산-염기 중 어떤 형태로 반응했는지 적으시오.

[4.2.2] 주기율표 상의 2주기 또는 3주기 원소와 결합된 산화물 중에, 이산화탄소(CO_2)와 반응하여 염을 생성할 수 있는 산화물을 모두 화학식으로 나타내시오.

[4.2.3] 반응에 따라 산 또는 염기로 작용할 수 있는 물질을 양쪽성 물질이라 한다. 물(H_2O) 분자는 대표적인 양쪽성 물질이다. HCl과 물 그리고 NH_3와 물의 화학 반응식을 각각 나타내고, 각 반응에서 브뢴스테드의 산-염기 또는 루이스의 산-염기 정의를 이용하여 물이 양쪽성 물질임을 보이시오.

[4.2.4] $HClO_4$와 $HBrO_4$ 중 상대적으로 더 강한 산을 나타내고, 그 이유를 제시문에 주어진 용어를 이용하여 설명하시오.