〈자연계열〉

2014학년도 서울과학기술대학교
통합사고력전형 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

물체의 운동을 미분을 이용하여 기술할 수 있는 능력을 평가한다. 또한 연속함수의 중요 성질인 중간값의 정리와 도함수의 중요 성질인 평균값의 정리를 이용하여, 문제를 해결할 수 있는 논리적 사고력을 갖추고 있는지 평가한다. 물체의 운동을 미분을 이용하여 기술하는 것은 미분의 주요한 응용 중 하나로, 미분적분학이 탄생한 계기이기도 하다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 중간값의 정리를 활용하여 5차 방정식의 근의 존재성을 추론할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 평균값의 정리를 활용하여 근이 유일하게 존재한다는 것을 도함수의 부호로부터 추론할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 문제에서 요구하는 바가 평균변화율과 순간변화율이 같은 시점을 찾는 것임을 추론할 수 있는지와 이를 평균값의 정리를 활용하여 논리적으로 기술할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] 시간 t에서 물체 A의 위치를 $f(t)$, 물체 B의 위치를 $g(t)$라고 하자. 그러면 두 물체 사이의 변위를 나타내는 함수는

$$h(t)=f(t)-g(t)=4t^5+t^3+2t-1$$

이다. 이 때, $h(t)$는 연속함수이고
$h(1)=f(1)-g(1)=6>0$이고, $h(0)=f(0)-g(0)=-1<0$이므로
중간값의 정리에 의하여 $h(a)=0$인 a가 0과 1 사이에 존재한다.

[1.2] 두 물체 사이의 변위 함수를 $h(t)=f(t)-g(t)=4t^5+t^3+2t-1$이라고 하자. 만약 $t=b>a$라면, $h(t)$는 구간 $[a,b]$에서 연속이고, 구간 (a,b)에서 미분가능이므로, 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{h(b)-h(a)}{b-a}=h'(c)$$

를 만족하는 c가 구간 (a,b)에 존재한다. 한편

$$h'(c)=20c^4+3c^2+2>0$$

이므로, $h(b)>h(a)=0$이다.
같은 방식으로 하면, $t=b<a$인 경우에는 $h(b)<h(a)=0$임을 알 수 있다. 따라서, 두 물체는 오직 한 번만 만난다.

[1.3] 시간 t에서 두 물체의 속도 차이는 $f'(t)-g'(t)=h'(t)$로 주어진다. 구간 $[0,a]$에서 $h(t)$는 연속함수이고, 구간 $(0,a)$에서 미분가능이므로, 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{1}{a}=\frac{h(a)-h(0)}{a-0}=h'(c)$$

를 만족하는 c가 구간 $(0,a)$에 존재해야 한다. 즉, 두 물체의 속도 차이가 $\frac{1}{a}$이 되는 지점이 존재한다.

3. 출제근거

- 고등학교 교과서, 수학 II, 연속함수의 성질(중간값의 정리)
- 고등학교 교과서, 수학 II, 다항함수의 미분

- 고등학교 교과서, 수학 II, 도함수의 성질(평균값의 정리)
- 고등학교 교과서, 수학 II, 도함수의 활용(속도와 가속도)

[문제 2]

1. 출제배경

주어진 상황을 행렬을 이용하여 수학적으로 모델링할 수 있는지 평가한다. 이미 알고 있는 사실들(수열의 극한과 행렬 곱셈)을 통합하여 정의된 개념(행렬의 극한)을 이해하고, 계산할 수 있는지 평가한다. 행렬을 이용한 수학적 모델링은 구글 검색엔진의 페이지 랭크 계산, 경영학에서 시장 점유율 예측 등 여러 분야로 응용되는 중요한 개념이다. 예를 들어, 스포츠팀 운영자는 팬들의 선호도가 장기적으로 어떻게 변하는지 예측할 필요가 있다. 이 문제와 같은 상황이라면 X팀 팬의 비율은 문제에서 주어진 집단 구성원의 약 91%로 수렴할 것이다. 물론, 영원히 사는 사람은 없지만 n이 증가하면 극한값이 좋은 근삿값이 되므로, 운영자는 이를 팀 운영에 참고할 수 있다. 한편, 팀 간 팬 이동 비율에 변화가 없다면 2013년의 선호도와는 관계없이 극한값이 동일하다. 그러므로 장기적인 관점에서 팀 선호도를 높이고자 한다면, 팀 간 팬 이동 비율에 변화를 주는 방법을 찾아봐야 한다는 것을 암시한다. 본 문제에서는 정치, 사회적 응용보다는 수학적으로 문제를 이해하고, 해석할 수 있는지 평가하는데 주안점을 두었다.

각 세부 문항별 출제 의도는 아래와 같다.

[2.1] 주어진 상황을 행렬 곱셈을 이용하여 나타낼 수 있는지 평가한다.

[2.2] 행렬 Q를 구하는 것이 결국 연립일차방정식의 풀이와 같다는 것을 인식할 수 있는지 평가한다. 다음으로 이렇게 구한 행렬 Q를 행렬의 극한을 계산하기 위해 응용할 수 있는지와 행렬 극한을 정의에 따라서 논리적으로 기술할 수 있는지를 평가한다.

[2.3] 문제에서 요구하는 것이 행렬 극한값을 구하는 것임을 인식하고, 이를 정확히 계산할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5 \\ 0.01 \times 0.5 + 0.9 \times 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.545 \\ 0.455 \end{pmatrix}$이다.

X팀 팬 중 1년 후 여전히 X팀 팬인 비율이 99%이고, Y팀 팬 중 1년 후 X팀의 팬이 되는 비율이 10%이므로 1년 후 X팀 팬의 비율은 $0.99 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5$가 된다. 비슷한 방법으로, X팀 팬 중 1%는 1년 후 Y팀 팬이 되고, Y팀 팬 중 90%는 여전히 Y팀 팬이므로 $0.01 \times 0.5 + 0.9 \times 0.5$는 1년 후 Y팀 팬 비율이다. 따라서 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5 \\ 0.01 \times 0.5 + 0.9 \times 0.5 \end{pmatrix}$에서 x는 1년 후 X팀 팬의 비율, y는 1년 후 Y팀 팬의 비율이다.

[2.2] $AQ = QD$로부터

$$\begin{pmatrix} 10 & 0.99z + 0.1w \\ 1 & 0.01z + 0.1w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0.89z \\ 1 & 0.89w \end{pmatrix}$$

이다. 각 성분이 같아야 하므로 연립해서 풀면 $z = -w$이다.

이제 $Q = \begin{pmatrix} 10 & -w \\ 1 & w \end{pmatrix}$의 행렬식이 1이므로

$$10w - (-w) = 11w = 1$$

이다. 결론적으로

$$Q=\begin{pmatrix}10 & -1/11\\ 1 & 1/11\end{pmatrix}$$

가 된다.

이제 극한을 계산하기 위하여 $A=QDQ^{-1}$임을 이용하면,

$$\begin{aligned}A^n=QD^nQ^{-1}&=\begin{pmatrix}10 & -1/11\\ 1 & 1/11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (0.89)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/11 & 1/11\\ -1 & 10\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}10 & -(0.89)^n/11\\ 1 & (0.89)^n/11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/11 & 1/11\\ -1 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10/11+(0.89)^n/11 & 10/11-10(0.89)^n/11\\ 1/11-(0.89)^n/11 & 1/11+10(0.89)^n/11\end{pmatrix}\end{aligned}$$

이 된다. 결론적으로

$$\lim_{n\to\infty}A^n=\begin{pmatrix}10/11 & 10/11\\ 1/11 & 1/11\end{pmatrix}$$

이다.

[2.3] n년 후의 X팀 팬의 비율과 Y팀 팬의 비율은 A^nP가 된다. 제시문 (나)에 의하면

$$\lim_{n\to\infty}A^nP=\begin{pmatrix}10/11 & 10/11\\ 1/11 & 1/11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10/11\\ 1/11\end{pmatrix}$$

이다. 이로부터, 이 집단의 X팀 팬 비율은 시간이 흐를수록 10/11에 가까워짐을 알 수 있다.

3. 출제근거

- 고등학교 교과서, 수학 I, 행렬의 곱셈
- 고등학교 교과서, 수학 I, 역행렬
- 고등학교 교과서, 수학 I, 수열의 극한

[문제 3]

1. 출제배경

전통적으로 물리학의 가장 기본 분야인 역학과 전자기학적 내용을 현대물리학의 원자구조까지 적용할 수 있는 상황을 설정하여, 연관된 물리적 단계들을 유도하는 것이 본 문제의 출제의도이다.

양성자 주위를 등속으로 회전하는 전자 운동을 고려하여, 수학적으로 도입한 벡터 개념을 바탕으로 물체의 운동을 기술하는 기본 물리량인 위치, 속도, 가속도를 이해한다.

이렇게 구해진 가속도는 항상 회전운동의 중심방향으로 향하는 것임을 확인하고, 이는 뉴턴의 운동 제2법칙에 의해 그 근원이 양성자와 전자 사이의 전기력임을 깨닫는다. 또한 뉴턴의 운동 제2법칙을 이용하여 전자운동의 주기와 반경 사이의 관계식을 유도하고, 이 결과는 중력에 기인하는 케플러의 행성운동에 대한 제3법칙이 전기력이 작용하는 상황에서도 똑같은 방법으로 적용됨을 알 수 있게 한다.

수소원자가 양성자와 전자로 구성되는 사실을 토대로 주어진 상황을 러더포드와 보어의 원자모형에 적용한다. 이로부터 수소원자의 에너지가 어떻게 유도되는지를 확인하고, 전자의 궤도전이 과정에서 흡수되는 광자의 에너지와 진동수를 이해한다.

주어진 기본적인 상황을 단편적으로 이해하는 것보다, 이 상황과 관련된 중요한 여러 물리학적 개념과 내용들을 단계적으로 유도하여 도출하고 이해하는 능력을 파악하는데 중점을 두었다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 전자의 위치는 원점으로부터 반경이 r 이고 위상이 ωt 이므로

위치벡터: $\vec{x}(t) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$

속도벡터: $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{x}(t)}{dt} = (-r\omega\sin\omega t,\ r\omega\cos\omega t)$

가속도벡터: $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = (-r\omega^2\cos\omega t,\ -r\omega^2\sin\omega t)$

가속도벡터와 위치벡터의 관계는 $\vec{a}(t) = -\omega^2(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t) = -\omega^2\vec{x}(t)$로 주어지므로 가속도의 방향은 위치벡터와는 반대 방향, 즉 원운동의 중심(원점) 방향이다.

[3.2] [3.1]의 결과로부터 가속도의 크기와 속력을 구할 수 있다.

가속도 크기: $a = |\vec{a}(t)| = \sqrt{r^2\omega^4\cos^2\omega t + r^2\omega^4\sin^2\omega t} = r\omega^2$

속력: $v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2\omega t + r^2\omega^2\cos^2\omega t} = r\omega$

따라서

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad \text{(식3.2)}$$

[3.3] 전자가 받는 힘은 양성자가 미치는 전기력이고, 이 전기력이 구심력으로 작용하여 전자가 양성자 주위를 원운동 한다. 제시문(다)와 (식3.2)을 이용하면, 뉴턴의 운동 제2법칙($F = ma$)으로부터

$$k\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad \text{(식3.3)}$$

이로부터 $v = \sqrt{\dfrac{ke^2}{mr}}$ 로 주어지며, 전자의 주기와 반경 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{e}\sqrt{\frac{m}{k}}\,r^{3/2}, \text{ 또는 } T^2 = \frac{4\pi^2 m}{ke^2}r^3$$

이것은 행성에 대한 케플러 3법칙(조화의 법칙)과 같은 꼴이다.

[3.4] 전자의 에너지는 운동에너지와 전기적 위치에너지의 합으로 주어지므로

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - k\frac{e^2}{r}$$

(식3.3)으로부터 $mv^2 = \dfrac{ke^2}{r}$ 을 위 식에 대입하면, E는 r에 대한 함수로 표현된다.

$$E = \frac{1}{2}k\frac{e^2}{r} - k\frac{e^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r} \qquad \text{(식3.4)}$$

이로부터 전자의 에너지는 전기적 위치에너지의 절반임을 알 수 있다.

[3.5] 반경이 r인 궤도에 있던 전자는 광자를 흡수하여 반경이 $4r$인 궤도로 전이하고, (식3.4)에 의해 전자의 에너지는 증가함을 알 수 있다. 따라서 광자의 진동수는

$$f = \frac{E(4r) - E(r)}{h} = \frac{-\dfrac{ke^2}{8r} + \dfrac{ke^2}{2r}}{h} = \frac{3ke^2}{8hr}$$

로 주어진다.

3. 출제근거

- 고등학교 교과서, 물리 I, 속도와 가속도
- 고등학교 교과서, 물리 I, 뉴턴의 운동법칙
- 고등학교 교과서, 물리 I, 일과 에너지
- 고등학교 교과서, 물리 I, 등속원운동/케플러법칙
- 고등학교 교과서, 물리 I, 전하/전기력
- 고등학교 교과서, 물리 I, 전기에너지
- 고등학교 교과서, 물리 I, 원자의 구조

[문제 4]

1. 출제배경

2014년도 수시 통합사고력고사 화학분야 시험에서는 모의 평가에서 공지된 유형 및 형식을 토대로 문항을 출제하였다. 제시문과 문항은 고등학교 화학 교과서 내용을 활용하였고, 이를 통한 문제 해석 능력과 응용 분야와의 연관성을 강조하였다. 제시문의 내용과 주어진 수식 및 그림에 대한 정확한 이해와 분석을 바탕으로 하여 이를 적용하고, 논리적 추론을 통하여 정답을 제시할 수 있도록 출제하였다.

제시문 [4.1]은 이온 결합 물질의 물리-화학적 성질을 화합물의 구조와 연관하여 잘 이해하고 있는지 점검하고자 하였다. 특히 이온 결합을 이루는 양이온과 음이온간의 인력과 반발력으로 인한 이온 결합 형성과 에너지 관계의 그림을 이해하고, 이들 이온 결합 물질의 전기적 성질과 물리적 성질을 양이온-음이온 간에 작용하는 힘과의 관계를 통하여 이해하고 있는지 알아보고자 하였다.

제시문 [4.2]는 화학의 기본인 용액의 성질과 산-염기 개념 및 액성에 대한 이해, 용액의 산의 세기에 대한 정의 및 산 지수인 pH의 이해, 그리고 산-염기 적정을 통한 미지 용액의 농도를 구하는 방법을 확인하고자 제시문 및 문항을 구성하였다. 반응의 자발성은 반응 엔탈피와 엔트로피로 표시되는 깁스 자유에너지식을 제시하고 이식을 통하여 반응의 자발성 여부를 판단 할 수 있는지 알아보고자 하였다.

제시문 [4.3]은 화합물을 이루는 기본적인 원소들의 이해와 그 원자의 구조에 대한 기본적인 사항에 대한 이해도를 확인하고자 하였다. 이에 자연계에 존재하는 동위원소의 존재에 대한 기본 지식을 통해 원자를 구성하는 양성자, 중성자, 전자, 원자번호 등에 대한 기본 내용을 담았다. 동위 원소 중에서 방사성 동위원소의 경우, 고대 유물이나 화석에 들어있는 ${}^{14}_{6}C$의 함량이 그 물질의 연대 측정에 이용되고 있다. 이를 바탕으로, 화학 반응식과 수식을 통해 정량적으로 분석하고 응용하는 능력을 평가해보고자 하였다.

2. 예시답안 및 해설

[4.1.1] (a)는 두 이온 간 인력을 나타냄: 양이온과 음이온이 자유로운 상태에서 가까워질수록 서로 인력이 작용하여 거리가 가까워지며 에너지는 낮아진다. (c)는 두 이온간 반발력을 나타냄: 두 이온 간의 결합 거리인 최저 에너지를 지나서 더 가까워지면 반발력이 우세해지고 에너지는 거리가 더 가까워질수록 급속도로 증가한다.

[4.1.2] 양이온 M^{a+}와 음이온 X^{b-}로 이루어진 이온 화합물의 화학식은 전기적으로 중성이므로 M_bX_a의 형태를 가지며, 따라서 Al_2O_3이다.

[4.1.3] 고체 상태의 이온 화합물에서 양이온과 음이온은 움직일 수 없기 때문에 전기전도성이 없다.

[4.1.4] 고체 상태의 이온 화합물이 외부 힘으로 인하여 규칙적인 배열이 밀리게 되면 동일한 이온 간의 반발력 때문에 쉽게 부스러진다.

[4.2.1] $x(100) = 2(0.05)10,\ \therefore x = 0.01 = 10^{-2}M$
산의 산성도를 나타내는 지수인 $pH = -\log[H^+] = -\log[10^{-2}] = 2$

[4.2.2] ΔG = ΔH - TΔS
ΔG < 0 : 자발, ΔG > 0 : 비자발, ΔG = 0 : 평형

	ΔH	ΔS	ΔG
(가)	+	+	?
(나)	+	-	항상 + : 항상 비자발
(다)	-	+	항상 - : 항상 자발
(라)	-	-	?

(다)의 경우 ΔG가 항상 음수이며 따라서 자발적인 변화이고, (나)의 경우 ΔG가 항상 양수이며 따라서 비자발적인 변화

[4.2.3] (가)와 (라)의 경우는 ΔH 와 ΔS의 부호만으로 ΔG의 크기를 결정할 수 없으며, 변화가 일어나는 온도에 따라서 자발성이 결정된다. (가)의 경우는 온도를 높여야 하며, (라)의 경우는 온도를 낮추어야 한다.

[4.3.1] O: $1s^2\ 2s^2\ 2p^4$, 홀전자 수: 2개

[4.3.2] 반감기(t = $t_{1/2}$)일때 A의 농도 [A] = $[A]_0/2$를 속도식에 대입하면,

$$0\text{차 반응} : t_{1/2} = \frac{[A]_0}{2k},\ 1\text{차 반응} : t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k},\ 2\text{차 반응} : t_{1/2} = \frac{1}{k[A]_0}$$

반감기를 구하는 식에 $t_{1/2}$ = $f([A]_0)$와 같이 A의 초기 몰 농도와 상관관계가 있다면 초기 몰 농도를 알지 못하는 경우 연대를 측정할 수 없다. 그러므로 1차반응의 경우만 반감기를 이용하여 연대를 측정할 수 있다.

3. 출제근거

- 고등학교 교과서, 화학 I, 산-염기 용액
- 고등학교 교과서, 화학 I, 원자의 구조
- 고등학교 교과서, 화학 I, 원소의 기원과 동위원소
- 고등학교 교과서, 화학 I, 화학결합의 종류
- 고등학교 교과서, 화학 I, 화학반응