<자연계열> 문제지

모집단위	
성 명	
수험번호	

※ 문제지는 고사 종료 후 반드시 제출하여야 함.

2014학년도 수시모집 통합사고력전형

□ 문제수 및 고사 시간

문제수	시 간	배점비율
4	10:00~11:20(80분)	각 문제당 총 점수의 25%.

□ 수험생 유의사항

- 계산기와 통신기기 등은 휴대할 수 없으며, 휴대시 부정행위자로 처리.
- 답안지는 1매만 사용해야 하며, 2매 사용시 무효(0점) 처리.
- 반드시 검정색 필기구만 사용(볼펜, 사인펜 사용가능, **연필, 샤프 사용불가**).
- 문제지의 여백을 연습장으로 활용할 수 있습니다.
- **답안지를 수정할 경우 두 줄을 그어 수정하시오.**
- **답안 작성시 "0점" 처리 기준**
  - 답안지에 답 이외의 특정 표기나, 자신의 신원을 드러내는 표시를 할 경우.
  - 흑색 필기구로 작성하지 않은 경우(색깔이 있는 필기구 사용금지).
  - 수정이 가능한 연필류로 작성한 경우.
  - 수정액 또는 수정테이프를 사용하여 수정한 경우.
  - 답안지의 지정된 구역을 벗어나 답안을 작성한 경우.

□ 답안지 작성요령

1. 답안지는 백지이므로 적절하게 구분하고, 문항 번호를 반드시 서두에 명기한 뒤 번호 순서대로 답하시오.
2. 풀이과정을 명시하시오.
3. [문제 1]은 문항 번호 [1.1], [1.2], [1.3]을 서두에 명기한 뒤, 번호 순서대로 답안을 작성하시오.
4. [문제 2]는 문항 번호 [2.1], [2.2], [2.3]을 서두에 명기한 뒤, 번호 순서대로 답안을 작성하시오.
5. [문제 3]은 문항 번호 [3.1], [3.2], [3.3], [3.4], [3.5]를 서두에 명기한 뒤, 번호 순서대로 답안을 작성하시오.
6. [문제 4]는 문항 번호 [4.1.1], [4.1.2], [4.1.3], [4.1.4], [4.2.1], [4.2.2], [4.2.3], [4.3.1], [4.3.2]를 서두에 명기한 뒤, 번호 순서대로 답안을 작성하시오.

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 중간값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(나) 평균값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \ (\text{단, } a<c<b)$$

를 만족하는 c가 적어도 하나 존재한다.

직선 위를 움직이는 두 물체 A와 B가 있다. 이 두 물체는 서로 다른 지점에서 동시에 출발하고, 출발 t초 후 물체 A, B의 위치는 다음과 같다.

A의 t초 후 위치 : $4t^5-t^4+9t^3-19t^2+14t-1$

B의 t초 후 위치 : $-t^4+8t^3-19t^2+12t$

[1.1] 두 물체가 만나는 시점이 있다는 것을 보이시오.

[1.2] 두 물체가 오직 한 번만 만난다는 것을 보이시오.

[1.3] 두 물체가 $t=a$에서 만난다고 하자. 두 물체의 속도 차이가 $\frac{1}{a}$이 되는 시점이 있음을 보이시오.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$와 자연수 n에 대하여 $A^n=\overbrace{AA\cdots A}^{n\text{개}}=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$으로 표시하자. n이 무한대로 갈 때, 네 개의 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$이 모두 수렴한다면, $\lim_{n\to\infty} A^n$을

$$\lim_{n\to\infty} A^n=\begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} a_n & \lim_{n\to\infty} b_n \\ \lim_{n\to\infty} c_n & \lim_{n\to\infty} d_n \end{pmatrix}$$

으로 정의한다. 예를 들면, $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & 1-(0.5)^n \\ 0 & (0.5)^n \end{pmatrix}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이다.

(나) 이차정사각행렬 A에 대하여 $\lim_{n\to\infty} A^n$이 존재한다면, 2×1행렬 C에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(A^n C)=\left(\lim_{n\to\infty} A^n\right)C$$

가 성립한다.

2013년 현재 어떤 집단의 구성원 중 야구팀 X의 팬이 50%이고, 나머지 50%는 야구팀 Y의 팬이라고 한다. X와 Y팀 팬의 수가 매 1년마다 다음과 같은 규칙에 따라 변한다고 하자.

X팀 팬이었던 구성원이 Y팀 팬이 되는 비율	1%
X팀 팬이었던 구성원이 여전히 X팀 팬인 비율	99%
Y팀 팬이었던 구성원이 X팀 팬이 되는 비율	10%
Y팀 팬이었던 구성원이 여전히 Y팀 팬인 비율	90%

[2.1] 행렬 $P=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$와 행렬 $A=\begin{pmatrix}0.99 & 0.1\\0.01 & 0.9\end{pmatrix}$에 대해서, 행렬 $AP=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$를 계산하고 x와 y의 의미를 설명하시오.

[2.2] 행렬 $A=\begin{pmatrix}0.99 & 0.1\\0.01 & 0.9\end{pmatrix}$와 행렬 $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0.89\end{pmatrix}$에 대하여 $AQ=QD$를 만족하고 행렬식이 1인 행렬 $Q=\begin{pmatrix}10 & z\\1 & w\end{pmatrix}$를 구하고, $\lim_{n\to\infty}A^n$을 구하시오. (단, 행렬 $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$의 행렬식은 $ad-bc$로 정의한다.)

[2.3] 이 집단 구성원 중 X팀 팬의 비율은 시간이 흐를수록 어떤 값에 가까워지는지 구하시오.

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 벡터량은 방향과 크기를 갖는 물리량이다. 2차원 벡터량은 성분이 두 개인 순서쌍으로 표기할 수 있다. 예를 들어, 이차원 평면상에서 위치를 나타내는 위치벡터는 직교좌표계에서 $\vec{x}=(x_1,x_2)$와 같이 표기하며, 그 크기는 $x=|\vec{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$로 주어진다. 벡터의 미분은 각각의 성분을 미분하는 것으로, 만약 $\vec{x}$가 시간에 대한 함수이면 $\frac{d\vec{x}}{dt}=(\frac{dx_1}{dt},\frac{dx_2}{dt})$와 같이 된다.

(나) 물체의 운동은 위치($\vec{x}$), 속도($\vec{v}$), 가속도($\vec{a}$)라는 벡터량으로 기술된다. 속도는 임의의 시간에서 물체의 빠르기를 나타내며, 위치의 시간에 따른 변화율로서, 수학적으로는 위치의 시간에 대한 도함수이다. 가속도는 속도의 시간에 따른 변화율이며, 발생원인은 물체에 가해진 힘이고, 수학적으로는 속도의 시간에 대한 도함수이다.

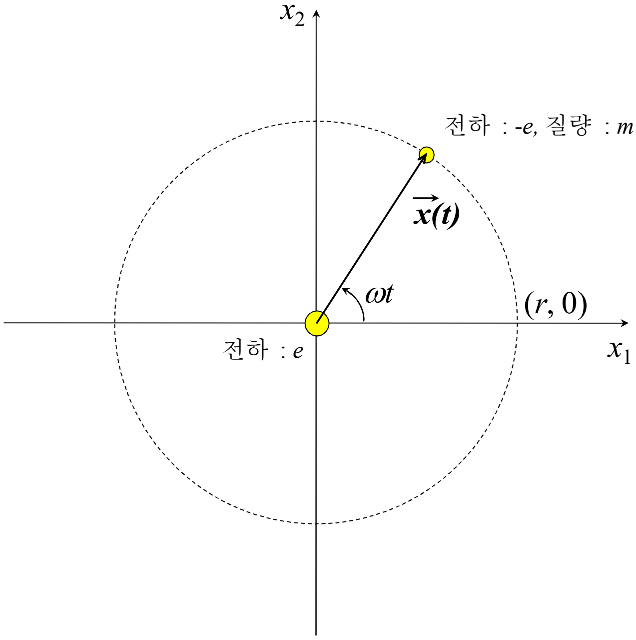
(다) 전하량이 각각 Q와 q인 점전하 사이에는 크기가 $k\frac{|Q||q|}{r^2}$인 전기력이 작용하며, 전기적 위치에너지는 $k\frac{Qq}{r}$로 주어진다. 이 때 점전하는 크기를 무시할 수 있는 전하를 의미하며, r은 두 전하 사이의 거리, k는 쿨롱상수이다.

(라) 수소원자는 한 개의 양성자로 이루어진 핵과 한 개의 전자로 구성된다. 러더포드는 전자가 핵 주위를 원운동하는 원자모형을 제안하였다. 보어는 "전자의 원운동은 전자의 궤도 반지름이 핵으로부터 $n=1,2,3\cdots$ 의 정수로 나타나는 특정 궤도에서만 가능하다"는 가설을 세웠다. 이 정수 n을 양자수라 하며, 전자가 가질 수 있는 에너지도 양자수와 관련된 양자화된 특정 에너지만을 갖게 된다. 전자가 다른 궤도로 전이할 때에는 그 에너지 차이만큼의 광자(빛)를 흡수하거나 방출한다. 이 때 광자의 진동수 f는 두 궤도의 에너지 차이로 결정되며, 각 궤도의 양자수를 n,m이라고 할 때, $hf=|E_n-E_m|$를 만족한다. 여기서 h는 플랑크상수이다.

※ [3.1]-[3.5] 문항 모두 연결된 문제임을 유의하시오.

※ 문제에 주어진 기호로만 답을 하고, 물리상수는 제시문과 본 문제에 주어진 상수기호를 이용하시오.

그림과 같이, 전하가 e인 양성자가 원점에 고정되어 있다. 그 주위를 질량이 m이고 전하가 $-e$인 전자가 이차원 평면상에서 반시계 방향으로 궤도반경이 r인 등속원운동을 하고 있다. 시간이 $t=0$일 때, 전자의 위치는 $\vec{x}(0)=(r,0)$이다. 임의의 시간 t에 x축으로부터 반시계 방향으로 측정한 전자위치의 각도는 ωt이고, ω는 양의 상수이다.



[3.1] 임의의 시간 t에서, 전자의 위치벡터 $\vec{x}(t)$, 속도벡터 $\vec{v}(t)$, 가속도벡터 $\vec{a}(t)$를 구하고, 가속도의 방향을 간략히 설명하시오.

[3.2] 임의의 시간 t에서 [3.1]의 결과를 이용하여, 가속도의 크기 a를 구하시오.[전자의 속력(속도의 크기) v와 r을 써서 표현하시오.]

[3.3] 뉴턴의 운동 제2법칙에 의하면, 가속도는 물체에 작용하는 힘에 의해 생성된다. 위에서 구한 전자의 가속도는 양성자가 전자에 작용하는 전기력에 기인한다.(양성자와 전자 사이의 중력은 너무 작아 무시할 수 있다.) 전자의 원운동 주기 T와 반경 r사이의 관계식을 구하시오.(최종 식은 v와 ω를 포함하지 않게 표현하시오.)

이상의 상황은 수소의 원자 모형으로 해석할 수 있다. 보어의 원자모델에 의하면, 특정 궤도에서 등속원운동 하는 전자가 특정 진동수를 가진 광자를 흡수 또는 방출하면 다른 궤도로 전이한다. 새로운 궤도에서 전자는 여전히 등속원운동을 하는 것으로 가정하며, 이 때 속력은 이전 궤도에서의 속력과는 다른 값을 갖게 된다. 한편 전자의 에너지 E는 운동에너지와 전기적 위치에너지의 합이다.

[3.4] 궤도반경이 r일 때, 전자의 에너지 E를 r만의 함수로 표현하시오.(즉, 최종 식은 v, ω, T를 포함하지 않게 표현하시오.)

[3.5] 반경이 r인 궤도에 있던 전자가 외부로부터 광자를 흡수하여 반경이 $4r$인 궤도로 전이하였다. 이 때 광자의 진동수 f를 구하시오.

[문제 4] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[4.1] 화학 결합의 여러 종류 중 이온 결합은 양이온과 음이온 사이에 작용하는 두 힘[그림 1(a), (c)]이 균형을 이루어 에너지가 가장 낮은 지점에서 형성된다[그림 1(b)]. 이온 결합 물질이 형성될 때, 한 원자가 양이온이 되면서 잃은 전자수와 다른 한 원자가 음이온이 되면서 얻은 전자수는 같으므로 전기적으로 중성이다. 따라서 이온 결합이 형성될 때, 이온의 종류에 따라 결합하는 이온의 수가 달라진다. 고체 이온 결합 물질은 양이온과 음이온이 규칙적으로 배열되어 있다. 고체 상태 이온 결합 물질에 포함된 모든 양이온과 음이온은 고정된 위치에서 움직일 수 없다. 대신, 외부로부터 힘을 받으면 이온 간의 규칙적인 배열이 밀리면서 쉽게 부스러진다.

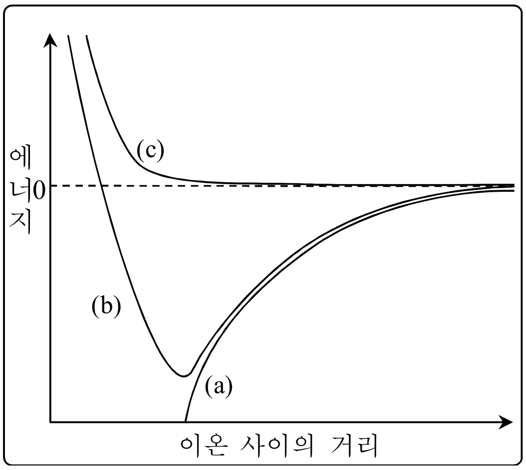


그림 1. 이온 결합 형성과 에너지 변화

[4.1.1] 그림 1은 이온 결합 형성에 포함된 양이온과 음이온 간의 거리에 따른 에너지 관계를 나타낸다. 두 이온 간에 작용하는 힘 중에서 그림 1의 (a)와 (c)에 해당하는 힘을 적고 그림의 형태가 의미하는 것을 에너지와 거리 간의 상관관계로 설명하시오.

[4.1.2] 이온 결합의 예로 소금이 있으며, 소금의 화학식은 NaCl로 양이온인 Na^+와 음이온인 Cl^-로 이루어진다. Al^{3+}와 O^{2-}가 이온 결합하여 생성하는 물질의 화학식을 쓰시오.

[4.1.3] 고체 상태인 이온 결합 물질의 전기 전도도 유무를 예측하고, 그 이유를 간단히 서술하시오.

[4.1.4] 고체 이온 결합 물질이 외부로부터 힘을 받으면 배열이 밀리면서 쉽게 부스러지는 이유를 간단히 서술하시오.

[4.2] 용액 중에는 산성 용액과 염기성 용액이 있다. 산(HA)을 물에 녹이면 양이온인 H^+와 음이온인 A^-로 나누어지는데, 이러한 현상을 이온화라고 한다. 이 때 생성된 수소 이온(H^+)이 용액의 성질을 산성으로 만든다. 산의 세기는 용액에 존재하는 H^+의 농도에 의하여 정해지는 지수 pH($=-\log[H^+]$)로 표기된다. 일반적으로 pH는 0~14 사이의 값을 가지며 pH가 7인 수용액은 중성, 7보다 작은 수용액은 산성, 7보다 큰 수용액은 염기성이다.

표준 상태에서 설탕은 물에 잘 녹지만 이온화되지 않으며, 이 과정은 자발적으로 일어난다. 하지만 설탕 용액은 외부로부터 어떠한 영향을 받지 않으면 다시 고체 상태로 분리되지 않는데, 이것을 비자발적이라고 한다. 어떤 변화가 자발적인지 아닌지에 대한 예측은 그 변화가 일어나기 전후의 엔트로피 차이(ΔS)나 엔탈피 차이(ΔH) 또는 깁스 자유에너지 차이(ΔG)를 이용하여 판단할 수 있다. 그리고 깁스 자유에너지 차이는 엔탈피와 엔트로피의 함수($\Delta G = \Delta H - T\Delta S$)로 표시된다. 온도(T)와 압력(P)이 일정한 상태에서 어떤 변화의 자발성 여부는 ΔG 부호에 의해 결정된다. 즉, $\Delta G < 0$이면 자발적, $\Delta G > 0$이면 비자발적, $\Delta G = 0$이면 평형 상태이다.

[4.2.1] 산-염기 용액의 농도는 중화 적정을 이용하여 구할 수 있다. 농도가 알려지지 않은 염산(HCl) 용액 100mL를 적정하는데 0.05M 수산화칼슘($Ca(OH)_2$) 용액 10mL가 사용되었다. 염산 용액의 농도와 pH를 구하시오. (단, $\log 10 = 1$이고, HCl은 수용액에서 완전히 이온화한다고 가정한다.)

[4.2.2] 일정한 온도와 압력 하에서 진행되는 화학 반응에 대한 ΔH와 ΔS의 부호가 아래 표와 같을 경우, 자발성에 대한 다음 질문에 답하시오.

	ΔH	ΔS	ΔG
(가)	+	+	?
(나)	+	−	?
(다)	−	+	?
(라)	−	−	?

(가)~(라) 네 경우 중 외부 조건에 관계없이 항상 자발적인 변화와 항상 비자발적인 변화를 찾고, 그 이유를 설명하시오.

[4.2.3] (가)~(라)에 주어진 ΔH와 ΔS의 부호로 반응의 자발성을 판단할 수 없는 경우, 반응이 자발적으로 되게 하기 위하여 어떤 조건을 어떻게 변화시켜야 하는지 설명하시오.

[4.3] 생명체를 이루는 주요 구성 원소로 수소(H), 탄소(C), 산소(O), 그리고 질소(N)를 들 수 있다. 원자는 원자핵과 핵 주위를 운동하고 있는 전자로 이루어져 있으며, 원자핵은 양성자와 중성자로 구성된다. 여러 원소들 중에서 양성자 수는 같지만 중성자 수가 달라서, 질량수가 다른 원소를 동위 원소라고 한다. 특히, 방사성 동위 원소는 농학·의학·생물학 등 연구에 널리 이용되고 있으며, ${}^{14}_{6}C$는 유물의 연대 측정에 이용된다. 방사성 원소는 시간이 지나면 다른 원소로 변하면서 그 원소의 양이 줄어든다. 이 때 방사성 원소가 처음 양의 반으로 줄어드는 데 걸리는 시간을 반감기($t_{1/2}$)라고 한다. 방사성 탄소 ${}^{14}_{6}C$의 반감기는 5,730년이다. 실질적으로 화석이나 유물의 연대 측정은, 방사성 탄소의 초기 농도를 알 수 없기 때문에, 측정시 시료에 남아 있는 이산화 탄소에 포함된 ${}^{14}_{6}C$와 ${}^{12}_{6}C$의 상대적인 양을 통하여 밝힐 수 있다. 그리고 이 과정에서는 반응물의 농도가 시간에 따라 변하는 형태로 표시되는 화학 반응속도론에 근거하여 유도된 0차, 1차, 2차 반응에 대한 반응속도식(아래 표)이 이용될 수 있다. 표에 주어진 식에서 $[A]_0$는 A의 초기 농도이며, $[A]$는 시간 t만큼 경과한 후 농도이고, k는 반응속도 상수이다.

0차 반응	1차 반응	2차 반응
$[A]-[A]_0=-kt$	$\ln[A]-\ln[A]_0=-kt$	$\frac{1}{[A]}-\frac{1}{[A]_0}=kt$

[4.3.1] 방사성 탄소 ${}^{14}_{6}C$를 구성하는 중성자수와 같은 수의 양성자를 갖는 원소의 바닥상태 전자 배치도를 나타내고, 훈트 규칙에 의한 홀전자 수를 적으시오.

[4.3.2] 위의 세 반응속도식을 이용하여 방사성 동위 원소 붕괴에 대한 반감기($t_{1/2}$)를 각각 유도하고, 이 식에 근거하여 몇 차 반응이 화석이나 유물의 연대 측정에 사용될 수 있는지 설명하시오.