

# 2019학년도 수시모집 모의 논술고사 문항해설 및 채점기준(자연계열)

[덕성여자대학교 문항정보 1]

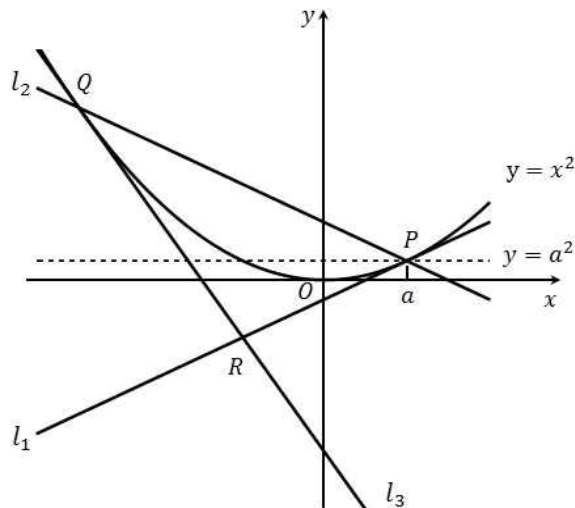
## 1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	[미적분 I]
	핵심개념 및 용어	두 곡선의 교점, 접선의 방정식, 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이, 수직으로 교차하는 두 직선의 관계
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

## 2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하십시오.

(1) 다음 그림과 같이 포물선  $y = x^2$  위의 한 점  $P(a, a^2)$ 에서의 접선을  $l_1$  이라고 하고, 직선  $y = a^2$ 을 접는 선으로 하여  $l_1$ 을 접었을 때 생기는 직선을  $l_2$ 라 하고, 직선  $l_2$ 와 포물선이 만나는 점을  $Q$ 라 하자. 점  $Q$ 에서 포물선에 대한 접선을  $l_3$ 라 하고, 직선  $l_3$ 와 직선  $l_1$ 가 만나는 점을  $R$ 이라 하자. (단,  $a > 0$ )



(2) 세 실수  $a, b, c$ 를 포함하는 구간에서 함수  $f(x)$ 가 연속일 때

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

(3) 두 함수  $f(x), g(x)$ 가 닫힌 구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선  $y = f(x), y = g(x)$ 와 두 직선  $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이  $S$ 는

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

**[문제 1-1]**

세 직선  $l_1, l_2$  그리고  $l_3$ 의 방정식을 구하라. [35점]

**[문제 1-2]**

포물선  $y = x^2$ 과 직선  $l_2$ 로 둘러싸인 영역을  $A$ 라 하고, 삼각형  $\triangle PQR$ 에서 영역  $A$ 를 제외한 영역을  $B$ 라 하자.  $A$ 와  $B$ 의 넓이를 각각  $S_1, S_2$ 라 할 때,  $\frac{S_2}{S_1}$ 를 구하라. [50점]

(단,  $A$ 와  $B$ 의 넓이는 정적분을 이용하여 구하시오.)

**[문제 1-3]**

두 직선  $l_1$ 과  $l_3$ 가 수직이라 하고, 직선  $l_1$ 과  $x$ 축의 사이의 각을  $\theta$ 라 할 때  $\theta$ 의 값을 구하라. [15점]

**3. 출제 의도**

본 문제는 함수의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있으며, 수평선에 대한 대칭이동에 따른 직선의 방정식을 구할 수 있는가를 평가한다. 또한 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

**[문제 1-1]**

주어진 곡선 위의 한 점에서 접선의 방정식을 한 점과 기울기를 알 때 직선의 방정식을 구하는 방법으로 구하고, 수평선에 대칭인 직선의 기울기를 구할 수 있는지를 평가한다.

**[문제 1-2]**

두 곡선에 의하여 둘러싸인 영역의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다. 또한 주어진 영역이 주어진 구간에서 서로 다른 여러 가지 곡선들에 의하여 둘러싸였을 때, 구간을 나누어 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.

**[문제 1-3]**

두 직선이 수직이 되기 위한 조건을 알고 있으며, 직선의 기울기가 직선과  $x$ 축 사이의 각을  $\theta$ 라 할 때  $\tan \theta$ 임을 이용하여 특수각이 됨을 알 수 있는지를 평가한다.

#### 4. 출제 근거

##### 가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	<p>[수학]-다. 도형의 방정식-2) 직선의 방정식</p> <p>① 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.</p> <p>[미적분I]-다. 다항함수의 미분법-2) 미분계수</p> <p>① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</p> <p>② 미분계수의 기하학적 의미를 안다.</p>
	성취기준·성취수준	<p>[수학]-다. 도형의 방정식-2) 직선의 방정식</p> <p>수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.</p> <p>[미적분I]-다. 다항함수의 미분법-2) 미분계수</p> <p>미적1311/1312. 미분계수의 뜻과 기하학적 의미를 알고, 그 값을 구할 수 있다.</p>
문제 1-1	교육과정	<p>[미적분I]-다. 다항함수의 미분법-2) 미분계수</p> <p>① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</p> <p>② 미분계수의 기하학적 의미를 안다.</p> <p>[미적분I]-다. 다항함수의 미분법-2) 도함수</p> <p>① 함수 <math>y = x^n</math> (<math>n</math>은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.</p> <p>[미적분I]-다. 다항함수의 미분법-3) 도함수의 활용</p> <p>① 접선의 방정식을 구할 수 있다.</p> <p>[미적분II]-다. 미분법-2) 도함수의 활용</p> <p>① 접선의 방정식을 구할 수 있다.</p>
	성취기준·성취수준	<p>[미적분I]-다. 다항함수의 미분법-2) 미분계수</p> <p>미적1311/1312. 미분계수의 뜻과 기하학적 의미를 알고, 그 값을 구할 수 있다.</p> <p>[미적분I]-다. 다항함수의 미분법-2) 도함수</p> <p>미적1321/1322. 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.</p> <p>[미적분I]-다. 다항함수의 미분법-3) 도함수의 활용</p> <p>미적1331. 접선의 방정식을 구할 수 있다.</p> <p>[미적분II]-다. 미분법-2) 도함수의 활용</p> <p>미적2321. 접선의 방정식을 구할 수 있다.</p>
문제 1-2	교육과정	<p>[미적분I]-라. 부정적분-1) 부정적분</p> <p>① 부정적분의 뜻을 안다.</p> <p>② 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.</p> <p>[미적분I]-라. 부정적분-2) 정적분</p> <p>① 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.</p> <p>② 정적분의 뜻을 안다.</p> <p>③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.</p> <p>[미적분I]-라. 부정적분-3) 정적분의 활용</p> <p>① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</p> <p>[미적분II]-라. 적분법-1) 여러 가지 적분법</p> <p>③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</p> <p>[미적분II]-라. 적분법-2) 정적분의 활용</p>

		① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	<p><b>[미적분I]-라. 부정적분-1) 부정적분</b> 미적1411/1412. 부정적분의 뜻을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.</p> <p><b>[미적분I]-라. 부정적분-2) 정적분</b> 미적1421. 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다. 미적1422. 정적분의 뜻을 안다. 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.</p> <p><b>[미적분I]-라. 부정적분-3) 정적분의 활용</b> 미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</p> <p><b>[미적분II]-라. 적분법-1) 여러 가지 적분법</b> 미적2413-1. 함수 <math>y = x^n</math> (<math>n</math>은 실수)의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</p> <p><b>[미적분II]-라. 적분법-2) 정적분의 활용</b> 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</p>
문제 1-3	교육과정	<p><b>[수학I]-다. 도형의 방정식-2) 직선의 방정식</b> ① 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.</p>
	성취기준· 성취수준	<p><b>[수학I]-다. 도형의 방정식-2) 직선의 방정식</b> 수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.</p>

## 나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분I	이강섭 외	미래N	2017	110, 150 180-182
	미적분I	류희찬 외	천재교과서	2017	188-192 199
	미적분II	김원경 외	비상교육	2018	165
기타	미적분II	오종철 외	EBS스마트북	2018	134 184
	교사용 지도서 미적분II 교수 학습 자료집	김원경 외	비상교육	2016	152
	EBS 수능특강 수학II & 미적분I	오종철 외	EBS스마트북	2018	180-188

## 5. 문항 해설

본 문항의 핵심적인 내용은 「미적분I」의 정적분의 활용 단원에서 다루어진다. 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 문제가 요구하는 포물선 위의 한 점에서 미분을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있으며, 또한 두 곡선이 만나는 점의 좌표를 구할 수 있는지를 평가하게 된다. 다항함수의 적분법과 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다. 끝으로 두 직선이 서로 수직으로 만나는 조건과 직선의 기울기와 탄젠트의 관계를 알고 있는지를 평가한다.

## 6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1-1	점 $P$ 에서 접선의 기울기를 구할 수 있다. (1-1)	5
	직선 $l_1$ 의 방정식을 구할 수 있다. (1-2)	5
	직선 $l_2$ 의 기울기를 구할 수 있다. (1-3)	3
	직선 $l_2$ 의 방정식을 구할 수 있다. (1-4)	5
	점 $Q$ 의 $x$ 좌표를 구할 수 있다. (1-5)	5
	점 $Q$ 의 $y$ 좌표를 구할 수 있다. (1-6)	2
	점 $Q$ 에서 접선의 기울기를 구할 수 있다. (1-7)	5
	직선 $l_3$ 의 방정식을 구할 수 있다. (1-8)	5
문제 1-2	영역 $A$ 의 넓이 $S_1$ 을 정적분을 이용하여 구할 수 있다. (2-1)	10
	점 $R$ 의 $x$ 좌표를 두 직선의 교점을 이용하여 구할 수 있다. (2-2)	7
	점 $R$ 의 $y$ 좌표를 구할 수 있다. (2-3)	3
	삼각형 $\triangle PQR$ 의 넓이를 두 영역으로 나누어 구하는 방법을 안다. (2-4)	8
	삼각형 $\triangle PQR$ 의 첫 번째 영역의 넓이를 구간 $[-3a, -a]$ 에서 정적분을 이용하여 구할 수 있다. (2-5)	9
	삼각형 $\triangle PQR$ 의 두 번째 영역의 넓이를 구간 $[-a, a]$ 에서 정적분을 이용하여 구할 수 있다. (2-6)	8
	영역 $B$ 의 넓이 $S_2$ 를 구할 수 있다. (2-7)	3
	$S_1$ 과 $S_2$ 의 비를 구할 수 있다. (2-8)	2
문제 1-3	두 직선이 수직이 되는 조건을 안다. (3-1)	5
	$a > 0$ 인 조건을 이용하여 $a$ 의 값을 구하는지 확인한다. (3-2)	3
	직선 $l_1$ 의 기울기를 이용하여 $\tan \theta$ 를 구할 수 있다. (3-3)	3
	$\tan \theta$ 값으로부터 특수각이 됨을 알고 $\theta$ 값을 구할 수 있다. (3-4)	4

## 7. 예시 답안

### [문제 1-1]

직선의 방정식을 구하기 위하여 기울기와 직선 위의 한 점을 선택하면 된다. 점  $P$ 가 주어져 있으므로 두 직선의 기울기를 구하면 된다.

점  $P$ 에서 접선의 기울기는

$$(x^2)' = 2x|_{x=a} = 2a \text{로부터 } 2a \text{가 된다.} \quad \dots\dots\dots(1-1)$$

따라서 직선  $l_1$ 의 방정식은 다음과 같다.

$$y - a^2 = 2a(x - a) \Rightarrow y = 2ax - 2a^2 + a^2 = 2ax - a^2 \quad \dots\dots\dots(1-2)$$

직선  $l_2$ 의 기울기는 수평선  $y = a^2$ 에 대한 대칭성을 이용하면  $-2a$ 가 된다.  $\dots\dots\dots(1-3)$

따라서 직선  $l_2$ 의 방정식은 다음과 같다.

$$y - a^2 = -2a(x - a) \Rightarrow y = -2ax + 2a^2 + a^2 = -2ax + 3a^2 \quad \dots\dots\dots(1-4)$$

직선  $l_3$ 의 방정식을 구하기 위하여 먼저 점  $Q$ 의 좌표를 구하자.

$Q$ 의  $x$ 좌표는 다음 방정식의 근이 된다.

$$\begin{aligned} x^2 &= -2ax + 3a^2 \\ x^2 + 2ax - 3a^2 &= (x - a)(x + 3a) = 0 \quad \dots\dots\dots(1-5) \end{aligned}$$

따라서  $Q$ 의  $x$ 좌표는  $-3a$ 가 되고  $y$ 좌표는  $9a^2$ 가 된다.  $\dots\dots\dots(1-6)$

점  $Q$ 에서 접선의 기울기는 다음과 같다.

$$(x^2)' = 2x \Rightarrow 2x|_{x=-3a} = -6a \quad \dots\dots\dots(1-7)$$

따라서 직선  $l_3$ 의 방정식은 다음과 같다.

$$y - 9a^2 = -6a(x + 3a) \Rightarrow y = -6ax - 18a^2 + 9a^2 = -6ax - 9a^2 \quad \dots\dots\dots(1-8)$$

### [문제 1-2]

영역  $A$ 의 넓이  $S_1$ 은 다음과 같이 정적분의 값으로 주어진다.

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-3a}^a [(-2ax + 3a^2) - x^2] dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 3a^2x \right]_{-3a}^a \\ &= \left( -\frac{1}{3}a^3 - a^3 + 3a^3 \right) - \left( -\frac{1}{3}(-27a^3) - 9a^3 - 9a^3 \right) \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + 2a^3 + 9a^3 = \frac{32}{3}a^3 \quad \dots\dots\dots(2-1) \end{aligned}$$

$B$ 의 넓이  $S_2$ 를 구하기 위하여 우리는 먼저 삼각형  $\triangle PQR$ 의 넓이를 구해야 하고, 이를 구하기 위

하여 먼저 점  $R$ 의 좌표를 알아야 한다.

점  $R$ 의  $x$ 좌표는 두 직선의 교점이므로 다음 방정식으로부터  $x = -a$ 임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} -6ax - 9a^2 &= 2ax - a^2 \\ 8ax - a^2 + 9a^2 &= 8ax + 8a^2 = 8a(x + a) = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(2-2)$$

또한  $R$ 의  $y$ 좌표는  $y = 2ax - a^2|_{x=-a} = -3a^2$ 이 된다.  $\dots\dots\dots(2-3)$

삼각형  $\triangle PQR$ 의 넓이를 구하기 위하여 다음과 같은 두 영역을 나누어 생각해야 한다. 즉 구간  $[-3a, -a]$ 에서 두 직선  $y = -2ax + 3a^2$ 과  $y = -6ax - 9a^2$  사이의 영역의 넓이와 구간  $[-a, a]$ 에서 두 직선  $y = -2ax + 3a^2$ 과  $y = 2ax - a^2$  사이의 영역의 넓이를 더하면 된다.  $\dots\dots\dots(2-4)$

먼저 구간  $[-3a, -a]$ 에서 두 직선  $y = -2ax + 3a^2$ 과  $y = -6ax - 9a^2$  사이의 영역의 넓이를 다음과 같이 정적분을 이용하여 구하면  $8a^3$ 이 된다.

$$\begin{aligned} \int_{-3a}^{-a} [(-2ax + 3a^2) - (-6ax - 9a^2)] dx &= \int_{-3a}^{-a} (4ax + 12a^2) dx \\ &= [2ax^2 + 12a^2x]_{-3a}^{-a} = (2a(a^2) + 12a^2(-a)) - (2a(-3a)^2 + 12a^2(-3a)) \\ &= (2a^3 - 12a^3) - (18a^3 - 36a^3) \\ &= -10a^3 + 18a^3 = 8a^3 \end{aligned} \dots\dots\dots(2-5)$$

같은 방법으로 구간  $[-a, a]$ 에서 두 직선  $y = -2ax + 3a^2$ 과  $y = 2ax - a^2$  사이의 영역의 넓이를 다음과 같이 정적분을 이용하여 구하면  $8a^3$ 이 된다.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a [(-2ax + 3a^2) - (2ax - a^2)] dx &= \int_{-a}^a (-4ax + 4a^2) dx \\ &= [-2ax^2 + 4a^2x]_{-a}^a = (-2a(a^2) + 4a^2(a)) - (-2a(-a)^2 + 4a^2(-a)) \\ &= (-2a^3 + 4a^3) - (-2a^3 - 4a^3) \\ &= 8a^3 \end{aligned} \dots\dots\dots(2-6)$$

따라서 삼각형  $\triangle PQR$ 의 넓이는  $16a^3$ 이 된다.

그러므로 구하는 영역  $B$ 의 넓이  $S_2$ 는 다음과 같다.

$$S_2 = 16a^3 - \frac{32}{3}a^3 = \frac{16}{3}a^3 \dots\dots\dots(2-7)$$

따라서 구하는 비는 다음과 같다.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{16a^3/3}{32a^3/3} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots(2-8)$$

[문제 1-3]

두 직선  $l_1$  과  $l_3$  의 기울기가 각각  $2a$ 와  $-6a$ 이므로 수직인 조건으로부터 다음과 같은 식이 성립한다.

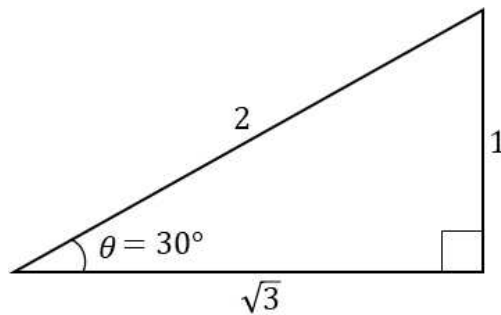
$$(2a)(-6a) = -12a^2 = -1 \quad \dots\dots\dots(3-1)$$

$a > 0$ 이므로  $a$ 의 값은  $a = \frac{1}{\sqrt{12}}$ 가 된다.  $\dots\dots\dots(3-2)$

이때 직선  $l_1$ 의 기울기는  $2a = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$ 이 된다. 따라서  $\tan\theta$ 의 값은 다음과 같다.

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots\dots(3-3)$$

이것으로부터 우리는 다음과 같은 특수각을 갖는 삼각형을 얻는다.



따라서 구하는 값은 다음과 같다.

$$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \quad \dots\dots\dots(3-4)$$



## [덕성여자대학교 문항정보 2]

### 1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	[수학 II]
	핵심개념 및 용어	수열의 귀납적 정의, 수학적 귀납법
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

### 2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

어느 농장의 토끼의 개체 수가 다음을 만족한다고 하자.

- (a) 첫째 달초에 새로 태어난 토끼 암수 한 쌍만이 있다.
- (b) 태어난 지 한 달 이상이 되는 토끼는 번식이 가능하다.
- (c) 번식이 가능한 토끼 암수 한 쌍은 매달 말에 토끼 암수 세 쌍을 낳는다.
- (d) 죽는 토끼는 없다.

수열  $a_n$ 을  $n$ 째 달초에 농장 안에 있는 토끼 암수 쌍의 개수라 하자.

[문제 2-1]

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 를 구하고, 수열  $a_n$ 의 귀납적 정의를 쓰시오. 이를 이용하여  $b_n = \frac{a_n}{3^n}$  이라 할 때 수열  $b_n$ 의 귀납적 정의를 쓰시오. [40점]

[문제 2-2]

$a_n$ 을  $a_{n-3}$ 와  $a_{n-4}$ 으로 표현하시오. [20점]

[문제 2-3]

[문제 2-2]의 답을 이용하여 모든 자연수  $k$ 에 대하여  $a_{4k}$ 가 7의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하시오. [40점]

### 3. 출제 의도

[문제 2-1]

- 주어진 상황으로부터 수열의 귀납적 정의를 얻어낼 수 있는가?
- 변형된 수열의 귀납적 정의를 얻어낼 수 있는가?

**[문제 2-2]**

- 수열의 귀납적 정의를 이해하여 원하는 식을 얻어낼 수 있는가?

**[문제 2-3]**

- 수학적 귀납법을 이용하여 원하는 내용을 증명할 수 있는가?

**4. 출제 근거**

**가) 교육과정 및 관련 성취기준**

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	<b>[수학 II] - 다. 수열 - 3) 수학적 귀납법</b> ① 수열의 귀납적 정의를 이해한다. ② 수학적 귀납법의 원리를 이해한다. ③ 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
	성취기준·성취수준	<b>[수학 II] - 다. 수열 - 3) 수학적 귀납법</b> 수학2331. 수열의 귀납적 정의를 이해한다. 수학2332/2333. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.
문제 2-1	교육과정	<b>[수학 II] - 다. 수열 - 3) 수학적 귀납법</b> ① 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
	성취기준·성취수준	<b>[수학 II] - 다. 수열 - 3) 수학적 귀납법</b> 수학2331. 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
문제 2-2	교육과정	<b>[수학 II] - 다. 수열 - 3) 수학적 귀납법</b> ② 수학적 귀납법의 원리를 이해한다.
	성취기준·성취수준	<b>[수학 II] - 다. 수열 - 3) 수학적 귀납법</b> 수학2332/2333. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.
문제 2-3	교육과정	<b>[수학 II] - 다. 수열 - 3) 수학적 귀납법</b> ③ 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
	성취기준·성취수준	<b>[수학 II] - 다. 수열 - 3) 수학적 귀납법</b> 수학2332/2333. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.

**나) 자료 출처**

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2014	129-134
	수학 II	신항균 외	지학사	2014	154-164

**5. 문항 해설**

농장의 토끼의 개체 수에 대한 주어진 조건들을 이해하여 “ $n$ 째 달초의 토끼의 개체 수”  $a_n$ 을 수학

적 귀납적 정의로 표현하는 지를 평가한다. 그리고 관련된 수열을 이해하여 이를 수학적 귀납적 정의로 표현하는 지를 평가한다.

수학적 귀납적 정의를 이용하여 필요한 관계식을 얻고, 이를 통해 “ $a_{4k}$ 가 7의 배수”임을 수학적 귀납법으로 증명할 수 있는 지를 평가한다.

## 6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준		배점
문제 2-1	$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 를 계산하기(10점)	답을 계산한 경우	10
	$a_n$ 의 귀납적 정의 (15점)	관계식 (1)을 기재한 경우 (4점)	9
		관계식 (1)을 얻어내는 풀이과정이 서술된 경우(5점)	
		첫째항 (2)를 기재한 경우	3
		둘째항 (3)을 기재한 경우	3
	$b_n$ 의 귀납적 정의 (15점)	관계식 (4)을 기재한 경우 (4점)	9
		관계식 (4)을 얻어내는 풀이과정이 서술된 경우 (5점)	
		첫째항 (5)를 기재한 경우	3
둘째항 (6)을 기재한 경우		3	
문제 2-2	$a_n$ 을 $a_{n-3}$ 와 $a_{n-4}$ 으로 표현(20점)	(7)을 기재한 경우 (10점)	20
		(7)을 얻어내는 풀이과정이 서술된 경우 (10점)	
문제 2-3	초기조건 (i) 부분	(8)을 기재한 경우 (7점)	14
		(9)를 기재한 경우 (7점)	
	귀납과정 (ii) 부분	(10)을 기재한 경우 (7점)	21
		(11)을 기재한 경우 (7점)	
		(12)을 기재한 경우 (7점)	
	서술 점수	풀이를 문장으로 조리있게 설명했는가?	5

## 7. 예시 답안

### [문제 2-1]

①  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 의 값 계산

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 1 \\
a_3 &= 1 + 3 \cdot 1 = 4 \\
a_4 &= 4 + 3 \cdot 1 = 7 \\
a_5 &= 7 + 3 \cdot 4 = 19
\end{aligned}$$

②  $a_n$ 의 귀납적 정의

- 관계식

$$\begin{aligned}
a_n &= (n \text{ 번째 달초의 토끼 쌍의 수}) \\
&= (n-1 \text{ 번째 달초의 토끼 쌍의 수}) + 3 \cdot (n-2 \text{ 번째 달초의 토끼 쌍의 수}) \\
&= a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad \dots\dots\dots(1)
\end{aligned}$$

- 첫째항과 둘째항

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \quad \dots\dots\dots(2) \\
a_2 &= 1 \quad \dots\dots\dots(3)
\end{aligned}$$

③  $b_n$ 의 귀납적 정의

- 관계식

$a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$  의 양변을  $3^n$ 으로 나누면

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{a_{n-1}}{3^n} + \frac{3a_{n-2}}{3^n} = \frac{1}{3} \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3} \frac{a_{n-2}}{3^{n-2}} \text{ 이다.}$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$  을 이용하면

$$b_n = \frac{1}{3}(b_{n-1} + b_{n-2}) \text{ 을 얻는다.} \quad \dots\dots\dots(4)$$

- 첫째항과 둘째항

$$b_1 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$b_2 = \frac{a_2}{3^2} = \frac{1}{9} \quad \dots\dots\dots(6)$$

[문제 2-2]

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 3a_{n-2} = (a_{n-2} + 3a_{n-3}) + 3a_{n-2} = 4a_{n-2} + 3a_{n-3} \\
&= 4(a_{n-3} + 3a_{n-4}) + 3a_{n-3} = 7a_{n-3} + 12a_{n-4}. \quad \dots\dots\dots(7)
\end{aligned}$$

[문제 2-3]

(i)  $k=1$ 일 때  $\dots\dots\dots(8)$

$$a_3 = a_2 + 3a_1 = 1 + 3 = 4$$

$$a_4 = a_3 + 3a_2 = 4 + 3 = 7 \text{이므로 } a_4 \text{는 } 7 \text{의 배수이다.} \quad \dots\dots\dots(9)$$

(ii)  $a_{4k}$ 이 7의 배수라고 가정하고  $a_{4(k+1)}$ 를 생각하자.  $\dots\dots\dots(10)$

식 (7)을 이용하면

$$a_{4(k+1)} = a_{4k+4} = 7a_{4k+1} + 12a_{4k} \text{ 이다.} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\text{수학적 귀납법 가정에서 } a_{4k} \text{이 } 7 \text{의 배수이므로 } a_{4(k+1)} \text{는 } 7 \text{의 배수이다.} \quad \dots\dots\dots(12)$$

[ 덕성여자대학교 문항정보 3 ]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	[확률과 통계]
	핵심개념 및 용어	비복원추출, 임의추출, 확률, 조건부확률, 확률의 곱셈정리, 확률의 덧셈정리, 확률질량함수, 평균, 분산
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오. 풀이과정을 자세히 서술하시오.

주머니 1, 2, 3이 있다. 주머니  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ )가 각각 선택될 확률은  $\frac{i}{6}$ 이다. 각각의 주머니에는 파란공, 빨간공, 하얀공이 들어있다. 주머니 1에는 파란공 3개, 빨간공 5개 하얀공 2개가 들어있고, 주머니 2에는 파란공 3개, 빨간공 3개, 하얀공 4개가 들어있으며, 주머니 3에는 파란공 6개, 빨간공 2개, 하얀공 2개가 들어있다. 각 주머니에서 공을 임의추출할 때 비복원추출을 사용한다.

(1) 주머니  $i$ 가 선택되는 사건을  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )로 정의하고, 파란공이 뽑히는 사건을  $B$ , 빨간공이 뽑히는 사건을  $R$ , 하얀공이 뽑히는 사건을  $W$ 로 정의한다.

(2) 주머니 1, 2, 3 중에서 임의로 한 개를 택하고, 선택된 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낸다.

(3) 주머니에 상관없이 파란공이 뽑혔을 때 1점, 빨간공이 뽑혔을 때 5점, 그리고 하얀공이 뽑혔을 때 8점을 점수로 각각 배정한다.

(4) 주머니 1, 2, 3 중에서 임의로 한 개를 택하고, 선택된 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼낸다.

(5) 주머니 1, 2, 3, 중에서 임의로 한 개를 택하고, 선택된 주머니에서 어떤 사건이 발생할 확률을 주머니 1, 2, 3 중에서 임의로 한 개를 택했을 때, 선택된 주머니에서 임의로 공을 꺼내는 사건의 확률과 각 주머니가 선택되는 확률로 표현한다.

[문제 3-1]

제시문 (1)과 (2)와 (3)과 (5)를 활용하여 각 주머니에서 각각의 파란공, 빨간공, 하얀공을 뽑는 사건에 대한 확률을 구하고, 한 개의 공을 뽑을 때에 받는 점수의 이산형 확률분포표를 구하시오. [40점]

**[문제 3-2]**

[문제 3-1]에서 구한 확률분포를 바탕으로 한 개의 공을 뽑을 때에 받는 점수( $X$ )의 평균과 분산을 구하시오. [25점]

**[문제 3-3]**

제시문 (1)과 (4)와 (5)를 활용하여 임의로 뽑힌 공이 파란공 1개와 흰공 1개이었을 때의 사건을  $E$ 라 할 때 사건  $E$ 를 (1)에서 정의한 사건들로 표현하고, 파란공 1개와 흰공 1개가 임의로 뽑혔을 때 선택된 주머니가 주머니 3일 확률을 구하시오. [35점]

**3. 출제 의도**

본 문항은 제시문에 설명된 내용을 각 사건으로 정의하고, 경우의 수와 조합의 수를 바탕으로 사건의 확률을 계산할 수 있는 지를 알아본다.

- 각 주머니를 선택하는 사건과 선택된 주머니에서 임의의 공을 꺼내는 사건을 조건부 확률과 정의된 사건의 확률로 표현할 수 있는 지를 알아본다.
- 확률의 곱셈정리를 활용하여 각 사건의 확률을 구할 수 있는 지를 알아본다.
- (3)에 주어진 점수인 이산확률변수에 대한 확률분포를 구성할 수 있는 지를 알아보고, 이를 활용하여 평균과 분산을 계산할 수 있는 지를 알아본다.
- 임의로 2개의 공이 뽑힌 사건이 주어졌을 때, 거꾸로 한 주머니가 선택될 조건부 확률을 계산할 수 있는 지를 알아본다.

**4. 출제 근거**

**가) 교육과정 및 관련 성취기준**

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	<p><b>[수학II] - (가) 집합과 명제 - 1) 집합</b>                      ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.</p> <p><b>[확률과 통계] - (나) 확률 - 1) 확률의 뜻과 활용</b>                      ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.                      ② 확률의 기본 성질을 이해한다.                      ③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p> <p><b>[확률과 통계] - (나) 확률 - 2) 조건부확률</b>                      ① 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.                      ③ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p> <p><b>[확률과 통계] - (다) 통계 - 1) 확률분포</b>                      ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다                      ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.</p>
	성취기준·성취수준	<p><b>[수학II] - (가) 집합과 명제 - 1) 집합</b>                      수학2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.</p> <p><b>[확률과 통계] - (나) 확률 - 1) 확률의 뜻과 활용</b>                      학통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다.                      학통1213. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p>

		<p><b>[확률과 통계] - (나) 확률 - 2) 조건부확률</b>  확통1221. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.  확통1223. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p> <p><b>[확률과 통계] - (다) 통계 - 1) 확률분포</b>  확통1311-1. 이산확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.  확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.  확통1312-2. 이산확률변수의 분산<sup>1)</sup>과 표준편차를 구할 수 있다.</p>
문제 3-1	교육과정	<p><b>[수학II] - (가) 집합과 명제 - 1) 집합</b>  ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.</p> <p><b>[확률과 통계] - (나) 확률 - 1) 확률의 뜻과 활용</b>  ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.  ② 확률의 기본 성질을 이해한다.  ③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p> <p><b>[확률과 통계] - (나) 확률 - 2) 조건부확률</b>  ① 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.  ③ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p>
	성취기준· 성취수준	<p><b>[수학II] - (가) 집합과 명제 - 1) 집합</b>  수학2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.</p> <p><b>[확률과 통계] - (나) 확률 - 1) 확률의 뜻과 활용</b>  확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다.  확통1213. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p> <p><b>[확률과 통계] - (나) 확률 - 2) 조건부확률</b>  확통1221. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.  확통1223. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p>
문제 3-2	교육과정	<p><b>[확률과 통계] - (다) 통계 - 1) 확률분포</b>  ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다  ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.</p>
	성취기준· 성취수준	<p><b>[확률과 통계] - (다) 통계 - 1) 확률분포</b>  확통1311-1. 이산확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.  확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.  확통1312-2. 이산확률변수의 분산<sup>2)</sup>과 표준편차를 구할 수 있다.</p>
문제 3-3	교육과정	<p><b>[확률과 통계] - (나) 확률 - 1) 확률의 뜻과 활용</b>  ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.  ② 확률의 기본 성질을 이해한다.  ③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p> <p><b>[확률과 통계] - (나) 확률 - 2) 조건부확률</b>  ① 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.  ③ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p>
	성취기준· 성취수준	<p><b>[확률과 통계] - (나) 확률 - 1) 확률의 뜻과 활용</b>  확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다.  확통1213. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p> <p><b>[확률과 통계] - (나) 확률 - 2) 조건부확률</b>  확통1221. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.  확통1223. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p>



나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	조도연	경기도교육청	2017	8-33
	수학 II	정상권	(주)금성출판사	2017	11-35
	수학 II	우정호	동아출판	2017	8-38
	확률과 통계	정상권	(주)금성출판사	2017	35-133
	확률과 통계	신항균	(주)지학사	2017	28-112
기타	수능특강 수학영역 확률과 통계	김민경	EBS	2018	18-84

5. 문항 해설

[문제 3-1]

제시문 (1)과 (2)와 (3)에서 파란공이 뽑혔을 때 1점, 빨간공이 뽑혔을 때 5점, 그리고 하얀공이 뽑혔을 때 8점을 점수로 각각 배정하므로 하나의 공이 뽑혔을 때의 점수를 확률변수  $X$ 라 하면  $X = 1$ 인 경우 파란공이 뽑히는 사건에 대한 확률을 정의하고,  $X = 5$ 인 경우 빨간공을 뽑히는 사건에 대한 확률을 정의하고  $X = 8$ 인 경우 하얀공이 뽑히는 사건에 대한 확률을 정의하여 이산확률변수의 확률분포를 구한다.

[문제 3-2]

[문제 3-1]에서 구한 이산확률변수  $X$ 의 확률분포를 사용하여  $X$ 의 기댓값과 분산을 계산한다.

[문제 3-3]

제시문 (4)에서 파란공 1개, 흰공 1개를 뽑는 사건을  $E$ 라 정의한 후 사건  $E$ 의 확률을 조건부 확률을 활용한 확률의 곱셈정리와 확률의 덧셈정리를 활용하여 구한다. 주어진 문제는 사건  $E$ 가 발생했을 때 사건  $A_3$ 의 조건부 확률을 묻는 문제로 조건부 확률을 사용하여 문제의 확률을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3-1	문제의 의미를 알지 못한다	0
	① 과 ② : 각각의 주머니가 선택되어진 후 각각의 파란공, 빨간공, 하얀공이 뽑히는 조건부 확률을 구할 수 있다. - 표현된 조건부 확률이 아닌 교집합의 확률( $P(B \cap A_i)$ )로 표현하면 0점	10

- 1) 기댓값(평균)과 표준편차를 구하는 것은 연관이 있지만 성취내용이 다른 것으로 판단하여 성취기준을 두 가지로 분리하였으며 표준편차를 구하는 전단계로 분산을 이해하고 구해야 하므로 분산이라는 용어를 사용하였다.
- 2) 기댓값(평균)과 표준편차를 구하는 것은 연관이 있지만 성취내용이 다른 것으로 판단하여 성취기준을 두 가지로 분리하였으며 표준편차를 구하는 전단계로 분산을 이해하고 구해야 하므로 분산이라는 용어를 사용하였다.

	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 확률 계산이 틀린 경우 5점</li> <li>- 확률 계산까지 다 맞으면 10점</li> </ul>	
	<p>③ : 주머니에 상관없이 각각의 파란공, 빨간공, 하얀공이 뽑히는 사건의 확률을 구할 수 있다.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 각 사건을 각각의 주머니가 뽑히는 사건과 각각의 공이 뽑히는 사건의 교집합의 합 <math>\left(\sum_{i=1}^3 P(B \cap A_i)\right)</math>으로 표현하면 10점</li> <li>- 각 사건을 각각의 주머니가 뽑히는 사건과 각각의 공이 뽑히는 사건의 교집합의 합으로 표현하고, 각 교집합의 확률을 조건부확률 <math>\times</math> 각 주머니가 뽑히는 확률의 합으로 다시 표현 <math>\left(\sum_{i=1}^3 P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^3 P(B   A_i) \times P(A_i)\right)</math>하면 15점</li> <li>- 계산한 확률까지 다 맞으면 20점</li> </ul>	20
	<p>④ : 확률변수 정의와 확률변수 값에 대한 각 확률값을 표현할 수 있다</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 확률변수의 값으로 <math>X = 1, X = 5, X = 8</math>을 표현하고 확률값을 정의하지 못하면 5점</li> <li>- &lt;표1&gt;과 같이 표현하거나 혹은 각 확률변수 값에 대한 확률을 나열하면 10점</li> </ul>	10
문제 3-2	문제의 의미를 알지 못한다.	0
	<p>① : [문제 3-1]에서 정의한 이산확률변수 <math>X</math>의 기댓값을 구할 수 있다.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 확률변수 <math>X</math>가 이산확률변수인 것을 알면 3점</li> <li>- 확률변수 <math>X</math>의 기댓값을 구하는 식을 알면 7점</li> <li>- 확률변수 <math>X</math>의 기댓값을 구하여 답이 맞으면 10점</li> </ul>	10
	<p>② : 이산확률변수 <math>X</math>의 분산을 구하는 식 <math>V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2</math>을 안다.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 분산식을 적을 수 있으면 5점</li> </ul>	5
	<p>③ : [문제 3-1]에서 정의한 이산확률변수 <math>X</math>의 분산을 구할 수 있다.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 확률변수 <math>X^2</math>의 기댓값을 구하는 식을 알면 4점</li> <li>- 확률변수 <math>X^2</math>의 기댓값을 구하면 7점</li> <li>- 확률변수 <math>X</math>의 분산을 구하면 10점</li> </ul>	10
문제 3-3	문제의 의미를 알지 못한다.	0
	<p>① : 파란공 1개, 흰공 1개를 뽑는 사건을 하나의 사건 <math>E</math>라 정의할 수 있다.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 사건 <math>E</math>를 제시문(1)에서 정의한 사건 <math>B</math>와 사건 <math>W</math>의 교집합(<math>E = B \cap W</math>)으로 표현하지 못하면 0점</li> <li>- 사건 <math>E</math>를 제시문(1)에서 정의한 사건 <math>B</math>와 사건 <math>W</math>의 교집합(<math>E = B \cap W</math>)으로 표현하면 5점</li> </ul>	5
	<p>② : 사건 <math>E</math>의 확률을 구할 수 있다.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 사건 <math>E</math>의 확률을 사건 <math>E</math>와 각 주머니는 뽑는 사건 <math>A_i (i = 1, 2, 3)</math>의 교집합의 확률의 합 <math>\left(P(E) = \sum_{i=1}^3 P(E \cap A_i)\right)</math>으로 표현하면 5점</li> <li>- 사건 <math>E</math>의 확률을 사건 <math>E</math>와 각 주머니는 뽑는 사건 <math>A_i (i = 1, 2, 3)</math>의 교집합의 확률의 합으로 표현하고, 각각의 교집합의 확률을 조건부 확률과 주머니를 뽑는 사건의 확률의 곱으로</li> </ul>	20

	표현하여 합 $\left(P(E) = \sum_{i=1}^3 P(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^3 P(E   A_i) \times P(A_i)\right)$ 로 다시 표현하면 10점 - 사건 $E$ 의 확률을 계산하는 식을 알고 있지만 계산이 틀리면 17점 - 계산한 확률까지 맞으면 20점	
	③ : 사건 $E$ 가 발생했을 때 사건 $A_3$ 의 조건부 확률을 묻는 문제로 조건부 확률을 사용하여 문제의 확률을 구할 수 있다. - 사건 $E$ 가 발생했을 때 사건 $A_3$ 의 조건부 확률 $(P(A_3   E))$ 을 정의할 수 있으면 3점 - 사건 $E$ 가 발생했을 때 사건 $A_3$ 의 조건부 확률을 정의하고 구하는 확률을 $P(A_3   E) = \frac{P(E \cap A_3)}{P(E)} = \frac{P(E   A_3)P(A_3)}{P(E)}$ 로 표현할 수 있으면 8점 - 계산한 확률까지 맞으면 10점	10

**7. 예시 답안**

**[문제 3-1]**

① 제시문에 주어진 각 사건을 정의하면 다음과 같다.

$A_i$ : 주머니  $i$ 가 선택되는 사건  $i = 1, 2, 3$

각 주머니가 선택될 확률은  $P(A_i) = \frac{i}{6}$ 으로

- 주머니 1이 선택될 확률은  $P(A_1) = \frac{1}{6}$
- 주머니 2가 선택될 확률은  $P(A_2) = \frac{2}{6}$
- 주머니 3이 선택될 확률은  $P(A_3) = \frac{3}{6}$ .

②  $B$ 를 파란공이 뽑히는 사건,  $R$ 을 빨간공이 뽑히는 사건,  $W$ 를 하얀공이 뽑히는 사건이라 하자. 주어진 제시문에서 다음의 조건부 확률을 정의할 수 있다.

- 주머니 1이 선택되었을 때
  - \* 파란공이 뽑히는 사건에 대한 확률은  $P(B | A_1) = \frac{3}{10}$
  - \* 빨간공이 뽑히는 사건에 대한 확률은  $P(R | A_1) = \frac{5}{10}$
  - \* 하얀공이 뽑히는 사건에 대한 확률은  $P(W | A_1) = \frac{2}{10}$
- 주머니 2가 선택되었을 때
  - \* 파란공이 뽑히는 사건에 대한 확률은  $P(B | A_2) = \frac{3}{10}$
  - \* 빨간공이 뽑히는 사건에 대한 확률은  $P(R | A_2) = \frac{3}{10}$

\* 하얀공이 뽑히는 사건에 대한 확률은  $P(W | A_2) = \frac{4}{10}$

- 주머니 3이 선택되었을 때

\* 파란공이 뽑히는 사건에 대한 확률은  $P(B | A_3) = \frac{6}{10}$

\* 빨간공이 뽑히는 사건에 대한 확률은  $P(R | A_3) = \frac{2}{10}$

\* 하얀공이 뽑히는 사건에 대한 확률은  $P(W | A_3) = \frac{2}{10}$

③ 그러므로

- 파란공이 뽑히는 사건의 확률

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) \\ &= P(B | A_1) \times P(A_1) + P(B | A_2) \times P(A_2) + P(B | A_3) \times P(A_3) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{6} + \frac{6}{10} \times \frac{3}{6} = \frac{3+6+18}{60} \\ &= \frac{27}{60} \end{aligned}$$

- 빨간공이 뽑히는 사건의 확률

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R \cap A_1) + P(R \cap A_2) + P(R \cap A_3) \\ &= P(R | A_1) \times P(A_1) + P(R | A_2) \times P(A_2) + P(R | A_3) \times P(A_3) \\ &= \frac{5}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{6} = \frac{5+6+6}{60} \\ &= \frac{17}{60} \end{aligned}$$

- 하얀공이 뽑히는 사건의 확률

$$\begin{aligned} P(W) &= P(W \cap A_1) + P(W \cap A_2) + P(W \cap A_3) \\ &= P(W | A_1) \times P(A_1) + P(W | A_2) \times P(A_2) + P(W | A_3) \times P(A_3) \\ &= \frac{2}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{4}{10} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{6} = \frac{2+8+6}{60} \\ &= \frac{16}{60} \end{aligned}$$

또는 전 사건의 확률은 1로부터

$$P(W) = 1 - P(B) - P(R) = 1 - \frac{27}{60} - \frac{17}{60} = \frac{16}{60}$$

④ 제시문 (3)에서 파란공이 뽑혔을 때 1점, 빨간공이 뽑혔을 때 5점, 그리고 하얀공이 뽑혔을 때 8점을 점수로 각각 배정하므로 하나의 공이 뽑혔을 때의 점수를 확률변수  $X$ 라 하면  $X=1$ 인 경우 파란공이 뽑히는 사건에 대한 확률을 정의하고,  $X=5$ 인 경우 빨간공을 뽑히는 사건에 대한 확률을 정의하고  $X=8$ 인 경우 하얀공이 뽑히는 사건에 대한 확률을 정의하여 이산확률변수  $X$ 의 확률분포는 다음과 같다.

<표 1. 확률변수  $X$ 의 확률분포표>

$X$	1	5	8
$P(X=x)$	$\frac{27}{60}$	$\frac{17}{60}$	$\frac{16}{60}$

[문제 3-2]

① [문제 3-1]의 <표 1>로부터  $X$ 는 이산확률변수 이므로 기댓값  $E[X]$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{i=1}^n x_i P(X=x_i) \\
 &= 1 \times P(X=1) + 5 \times P(X=5) + 8 \times P(X=8) \\
 &= 1 \times \frac{27}{60} + 5 \times \frac{17}{60} + 8 \times \frac{16}{60} \\
 &= \frac{240}{60} = 4
 \end{aligned}$$

② 이산확률변수  $X$  분산을 다음과 같이 구한다.

$$V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 \text{에서}$$

③  $X^2$ 을 계산하면

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \sum_{i=1}^n x_i^2 P(X=x_i) \\
 &= 1^2 \times P(X=1) + 5^2 \times P(X=5) + 8^2 \times P(X=8) \\
 &= 1 \times \frac{27}{60} + 25 \times \frac{17}{60} + 64 \times \frac{16}{60} \\
 &= \frac{27 + 425 + 1024}{60} = \frac{1476}{60}
 \end{aligned}$$

이므로

$$V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \frac{1476}{60} - 4^2 = \frac{1476 - 16 \times 60}{60} = \frac{1476 - 960}{60} = \frac{516}{60} = \frac{86}{10} = \frac{43}{5}$$

[문제 3-3]

① 제시문 (4)에서 파란공 1개, 흰공 1개를 뽑는 사건을  $E$ 라 정의한다. 이때 사건  $E$ 는 [문제3-1]에서 정의한 사건  $B$ 와 사건  $W$ 의 교집합( $E = B \cap W$ )으로 표현할 수 있다.

② 그러므로 사건  $E$ 의 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 P(E) &= P(E \cap A_1) + P(E \cap A_2) + P(E \cap A_3) \\
 &= P(E | A_1)P(A_1) + P(E | A_2)P(A_2) + P(E | A_3)P(A_3) \\
 &= P(B \cap W \cap A_1) + P(B \cap W \cap A_2) + P(B \cap W \cap A_3) \\
 &= P(B \cap W | A_1)P(A_1) + P((B \cap W | A_2)P(A_2) + P(B \cap W | A_3)P(A_3) \\
 &= \frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_{10}C_2} \times \frac{1}{6} + \frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_{10}C_2} \times \frac{2}{6} + \frac{{}_2C_1 \cdot {}_6C_1}{{}_{10}C_2} \times \frac{3}{6} \\
 &= \frac{11}{45}
 \end{aligned}$$

③ 주어진 문제는 사건  $E$ 가 발생했을 때 사건  $A_3$ 의 조건부 확률을 묻는 문제로 조건부 확률을 사용하여 문제의 확률을 구할 수 있다.

먼저 주머니 3이 뽑히고, 그리고 파란공 1개와 흰공 1개가 뽑히는 사건의 확률, 즉 사건  $A_3$ 와 사건  $E$ 가 발생하는 교집합의 확률을 구해보면

$$\begin{aligned} P(E \cap A_3) &= P(E | A_3)P(A_3) = P(B \cap W | A_3)P(A_3) \\ &= \frac{{}_2C_1 \cdot {}_6C_1}{{}_{10}C_2} \times \frac{3}{6} = \frac{2 \times 6}{10 \times 9} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{36}{270} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

이므로, 나온 공이 파란공 1개, 흰공 1개이었을 때, 택한 주머니가 주머니 3일 확률은

$$\begin{aligned} P(A_3 | E) &= P(A_3 | B \cap W) = \frac{P(E \cap A_3)}{P(E)} = \frac{P(E | A_3)P(A_3)}{P(E)} \\ &= \frac{\frac{36}{270}}{\frac{66}{270}} = \frac{6}{11} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

이다.