2018학년도 수시모집 논술고사 문항해설 및 채점기준 (자연계열)

[덕성여자대학교 문항정보 7]

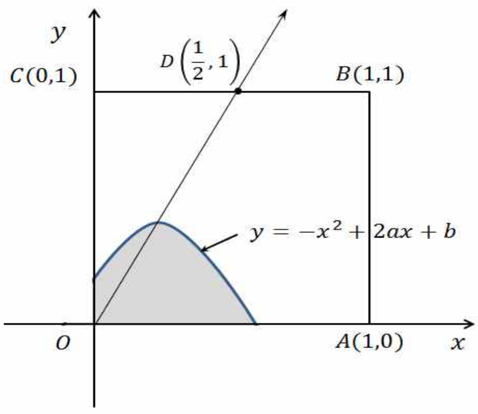
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 1	
출제 범위	교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분Ⅰ
	핵심 개념 및 용어	포물선의 꼭짓점의 좌표, 두 곡선 사이 영역의 넓이, 함수의 그래프에 놓인 점과 함수와의 관계
예상 소요 시간	40분 / 120분	

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.

그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 $OABC$가 있다. 꼭짓점 O를 시작으로 사각형 $OABC$ 내부가 다음과 같은 조건을 만족하면서 그림에서 색칠된 부분과 같이 물감으로 물들고 있다고 하자.



(1) 주어진 사각형 $OABC$가 물감으로 물드는 영역의 경계가 이차함수

$$y=-x^2+2ax+b$$

의 그래프가 된다.

(2) 주어진 이차함수의 꼭짓점은 원점 $O(0,0)$와 점 $D\left(\frac{1}{2},1\right)$을 연결하는 직선을 따라서 화살표 방향으로 움직인다.

[문제 1-1]
제시문을 이용하여 b를 a의 식으로 풀이와 함께 나타내시오.[25점]

[문제 1-2]
(1)에 주어진 이차함수가 점 A를 지날 때, 이차함수의 식을 구하고, 이를 이용하여 사각형의 내부 가운데 물감으로 물든 영역의 넓이를 풀이와 함께 구하시오.[45점]

[문제 1-3]
사각형의 내부 전체가 물감으로 처음으로 물든 시점에서 (1)에 주어진 이차함수의 꼭짓점의 좌표를 풀이와 함께 구하시오.[30점]

3. 출제 의도

본 문제는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있으며, 한 점이 곡선 위에 있다는 의미를 평가한다. 주어진 조건에 맞는 영역의 넓이를 정적분을 활용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

[문제 1-1]
이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있으며 꼭짓점이 직선 위에 놓였을 때 꼭짓점의 x좌표와 y좌표 사이의 관계를 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[문제 1-2]
이차함수의 그래프가 주어진 점을 지날 때 이를 만족시키는 이차함수를 찾고, 정적분을 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[문제 1-3]
이차함수 그래프의 대칭성이나 다른 방법을 이용하여 이차함수 그래프 위의 영역

이 사각형을 완전히 덮는 위치를 파악하며, 이를 이용하여 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	[수학Ⅰ] - (나) 방정식과 부등식 - $\boxed{2}$ 이차방정식과 이차함수
	성취기준·성취수준	[수학Ⅰ] - 나. 방정식과 부등식 - 2) 이차방정식과 이차함수 수학1221. 이차함수와 이차방정식의 관계를 설명할 수 있다. [수학Ⅰ] - 다. 도형의 방정식 - 2) 직선의 방정식 수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.
문제1-1	교육과정	[수학Ⅰ] - (나) 방정식과 부등식 - $\boxed{2}$ 이차방정식과 이차함수 ① 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해한다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅰ] - 나. 방정식과 부등식 - 2) 이차방정식과 이차함수 수학1221. 이차함수와 이차방정식의 관계를 설명할 수 있다.
문제1-2	교육과정	[수학Ⅰ] - (나) 방정식과 부등식 - $\boxed{2}$ 이차방정식과 이차함수 ① 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해한다. [수학Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{2}$ 직선의 방정식 ① 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다. [미적분Ⅰ] - (라) 다항함수의 적분법 - $\boxed{1}$ 부정적분 ② 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다. [미적분Ⅰ] - (라) 다항함수의 적분법 - $\boxed{3}$ 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅰ] - 나. 방정식과 부등식 - 2) 이차방정식과 이차함수 수학1221. 이차함수와 이차방정식의 관계를 설명할 수 있다. [수학Ⅰ] - 다. 도형의 방정식 - 2) 직선의 방정식 수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다. [미적분Ⅰ] - 라. 다항함수의 적분법 - 1) 부정적분 미적1411/1412. 부정적분의 뜻을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다. [미적분Ⅰ] - 라. 다항함수의 적분법 - 3) 정적분의 활용 미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제1-3	교육과정	[수학Ⅰ] - (나) 방정식과 부등식 - $\boxed{2}$ 이차방정식과 이차함수 ② 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅰ] - 나. 방정식과 부등식 - 2) 이차방정식과 이차함수 수학1223. 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	우정호 외	동아출판	2017	86-88 94-96
	수학Ⅰ	정상권 외	금성출판사	2017	88-89
	수학Ⅰ	김창동 외	교학사	2017	73-78
	미적분Ⅰ	이강섭 외	미래N	2017	179-181
	미적분Ⅰ	신항균 외	지학사	2017	170-175
기타	수학Ⅰ 교사용 지도서	이준열 외	천재교육	2017	118-123 128-133

5. 문항 해설

본 문항의 핵심적인 내용은 「수학Ⅰ」의 ‘이차함수’ 와 「미적분Ⅰ」의 ‘적분법의 응용’의 단원에서 다루어진다. 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 문제가 요구하는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있으며, 어떤 점이 주어진 곡선에 있다는 것은 곡선의 방정식을 만족한다는 것을 이해하고, 이를 응용할 수 있는지를 평가한다. 다항함수의 적분법과 정적분을 활용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지, 또한 영역이 전체를 포함하는 관계를 구할 수 있으며 이 모든 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	① 이차함수 그래프 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다. ② 두 점을 연결하는 직선의 식을 구할 수 있다. ③ 꼭짓점이 직선 위에 놓인다는 것의 의미가 좌표의 x좌표와 y좌표가 직선의 식을 만족한다는 것을 안다. ④ b를 a의 식으로 나타낼 수 있다. A+: ①, ②, ③, ④를 모두 완전히 구할 수 있다. A: ①, ②, ③, ④ 중에 세 항목을 구할 수 있다. B+: ①, ②, ③, ④ 중에 두 항목을 구할 수 있다. B: ③을 구할 수 있다. C: ②를 구할 수 있다. D: ①을 구할 수 있다. E: 문제를 풀지 않았다.	25
1-2	① 이차함수의 그래프가 A를 지나기 위한 a의 관계식(이차방정식) 을 구할 수 있다 ② a의 영역($0 \le a \le 1$)을 이용하여 이차함수를 구할 수 있다. ③ 정적분을 구할 수 있다.	45

	A+: ①, ②, ③을 구할 수 있으며 값도 일치한다. A: ①, ②, ③을 구할 수 있으며 틀린 값이 있다. B+: ①과 ②를 구할 수 있으며 값도 일치한다. B: ①과 ②를 구할 수 있으나 틀린 값이 있다. C: ①을 구할 수 있다. D: ①을 구할 수 있으나 틀린 값이 있다. E: 문제를 풀지 않았다.	
1-3	① 그래프가 점 C와 만난다는 이유를 설명할 수 있다. ② 점 C와 만난다는 것을 이용하여 a의 값을 구할 수 있다. ③ 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다. A+: ①, ②, ③을 모두 완전히 구할 수 있다. A: ②, ③을 구할 수 있다. B+: ②, ③을 구하는 과정에 틀린 값이 있다. B: ②를 구할 수 있다. C: ①을 구할 수 있다. D: ①을 구할 수 있으나 틀린 값이 있다. E: 문제를 풀지 않았다.	30

7. 예시 답안

[문제 1-1]

<답안 1>

$$\begin{aligned} y &= -x^2+2ax+b = -(x^2-2ax)+b \\ &= -(x-a)^2+b+a^2 \end{aligned}$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(a, b+a^2)$가 된다. 원점 O와 점 $D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$를 잇는 직선의 식은

$$y = 2x$$

이고, 꼭짓점이 이 직선 위에 있으므로 우리는 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} b+a^2 &= 2a \\ b &= -a^2+2a \end{aligned}$$

<답안 2>

$$\begin{aligned} y &= -x^2+2ax+b = -(x^2-2ax)+b \\ &= -(x-a)^2+b+a^2 \end{aligned}$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(a, b+a^2)$가 된다. 원점 O와 점 $D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$를 잇는 직선의

방정식은

$$y = 2x$$

이고, 꼭짓점의 좌표는 $(a, 2a)$이다. 따라서 이차함수는 다음과 같다.

$$y = -(x-a)^2 + 2a = -x^2 + 2ax - a^2 + 2a$$

$y = -x^2 + 2a + b$와 상수항의 계수를 비교하면 $b = -a^2 + 2a$를 얻는다.

[문제 1-2]
문제1-1에서 얻은 결과를 이용하면 다음과 같은 이차함수를 얻는다.

$$y = -(x-a)^2 + b + a^2 = -(x-a)^2 + 2a = -x^2 + 2ax + (2a - a^2)$$

이 이차함수의 그래프가 점 $A(1,0)$를 지나므로

$$\begin{aligned} -1^2 + 2a(1) + (2a - a^2) &= 0 \\ a^2 - 4a + 1 &= 0 \end{aligned}$$

따라서

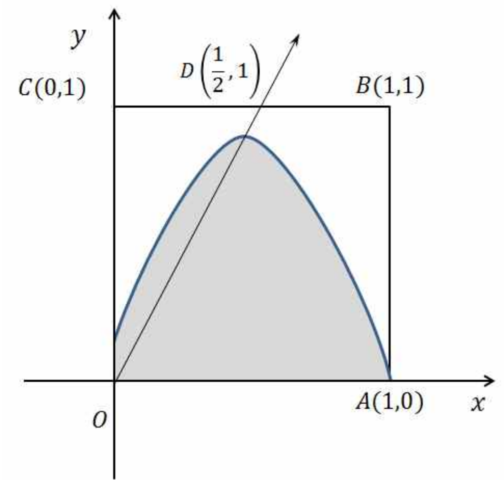
$$a = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$$

이 된다.

주어진 조건으로부터 $0 \le a \le 1$이므로, $a = 2 - \sqrt{3}$이다. 따라서 구하는 이차함수는 다음과 같다.

$$y = -x^2 + 2(2-\sqrt{3})x + \{2(2-\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3})^2\} = -x^2 + 2(2-\sqrt{3})x + (-3 + 2\sqrt{3})$$

구하는 영역은 <그림 1>과 같이 직선 x축과 위 포물선으로 둘러싸인 부분이므로 구하는 넓이는 다음과 같다.



<그림 1>

$$\begin{aligned}\int_0^1\{-x^2+2(2-\sqrt{3})x+(-3+2\sqrt{3})\}dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3+(2-\sqrt{3})x^2+(-3+2\sqrt{3})x\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3}+(2-\sqrt{3})+(-3+2\sqrt{3}) \\ &= -\frac{4}{3}+\sqrt{3}\end{aligned}$$

[문제 1-3]

<답안 1>

이차함수의 꼭짓점의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이 될 때까지 사각형 전체가 물들지 않으므로 x좌표가 $\frac{1}{2}$보다 커야 한다. 또한 이차함수의 그래프가 대칭임을 이용하면 이차함수가 점 C와 만날 때 처음으로 사각형 전체가 물들게 된다. 이차함수 $y=-(x-a)^2+2a$가 점 C를 지나므로

$$\begin{aligned}-(0-a)^2+2a &= 1 \\ a^2-2a+1 &= 0 \\ (a-1)^2 &= 0 \\ a &= 1\end{aligned}$$

따라서 구하는 꼭짓점의 좌표가 $(a, b+a^2)=(a, 2a)$이므로 구하는 좌표는 $(1, 2)$가 된다.

<답안 2>

사각형 전체가 물들 가능성은 이차함수의 그래프가 두 꼭짓점 B 또는 C를 지나는 경우이다. 이차함수 $y=-(x-a)^2+2a$가 점 $B(1,1)$를 지나면 a는 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} -(1-a)^2+2a &= 1 \\ a^2-4a+2 &= 0 \\ a=2\pm\sqrt{2} & \end{aligned}$$

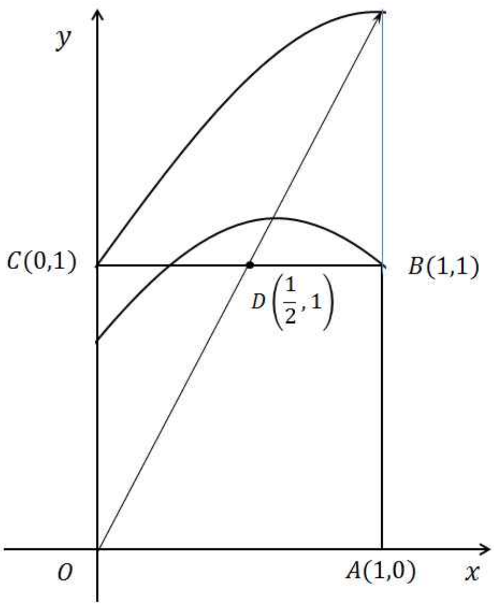
그림으로부터 분명히 $\frac{1}{2}\le a\le 1$이므로 $a=2-\sqrt{2}$이다. 그러나 이 경우 이차함수는

$$\begin{aligned} y &= -x^2+2ax+(2a-a^2) \\ &= -x^2+2(2-\sqrt{2})x+\{2(2-\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})^2\} \end{aligned}$$

이 되고, 이 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 값은
$y=2(2-\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}-2$이다. 이 값은 1보다 작으므로 <그림 2>와 같이 사각형의 내부 전체가 물들지 않는다. 다음으로 점 C와 만나는 a 값은

$$\begin{aligned} -(0-a)^2+2a &= 1 \\ a^2-2a+1 &= 0 \\ (a-1)^2 &= 0 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

따라서 구하는 꼭짓점의 좌표가 $(a,b+a^2)=(a,2a)$이므로 구하는 좌표는 $(1,2)$가 된다.



<그림 2>

[덕성여자대학교 문항정보 8]

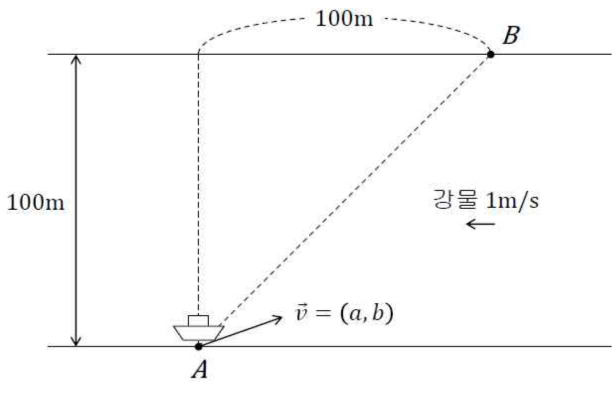
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 2	
출제 범위	교육과정 과목명	기하와 벡터, 미적분 II
	핵심 개념 및 용어	평면벡터의 덧셈, 평행, 성분, 내적, 속도, 삼각함수 사이의 관계, 이차함수의 근의 공식
예상 소요 시간	40분 / 120분	

2. 문항 및 제시문

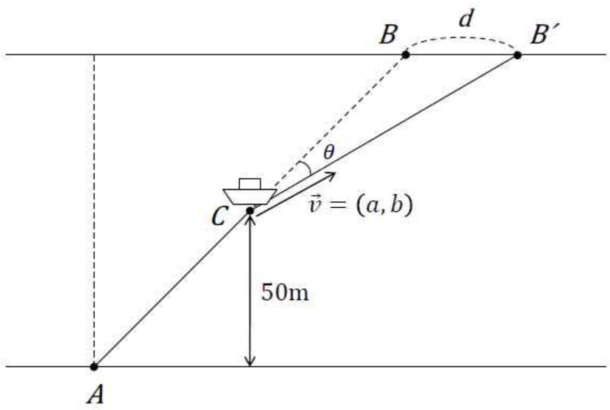
다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

(1) <그림 1>과 같이 폭이 100m인 강이 있고, 강물이 오른쪽에서 왼쪽으로 1m/s의 속력으로 흐르고 있다. 위치 A에 최대 속력이 4m/s인 보트가 놓여 있다. 이 보트가 최대 속력으로 위치 B를 향해 일직선으로 가려고 한다. <그림 1>에 제시된 보트의 속도를 $\vec{v}=(a,b)$ 라 하자.



<그림 1>

(2) <그림 2>처럼 보트가 A, B 사이의 거리의 반을 지나는 순간부터 강물의 흐름이 갑자기 멈추었다. 그러나 보트는 변함없이 같은 속도 $\vec{v}=(a,b)$ 로 이동하여 위치 B'에 도달했다.



<그림 2>

[문제 2-1]
(1) 에서 $\vec{v}=(a,b)$ 를 풀이와 함께 구하시오.[34점]

[문제 2-2]
<그림 2>에서 목적지 B와 도착지 B' 사이의 거리 d를 풀이와 함께 구하시오.[33점]

[문제 2-3]
<그림 2>에서 $\angle BCB'=\theta$에 대하여 $\cos\theta$를 풀이와 함께 구하고, 이를 이용하여 $\tan\theta$를 풀이와 함께 구하시오.[33점]

3. 출제 의도

본 문제는 보트가 강을 건너는 상황을 평면벡터를 이용하여 이해하고 문제에서 요구하는 값을 구하는 지를 평가하고자 한다.

[문제 2-1]
- 벡터의 합을 올바로 적용하는가?
- 벡터의 평행을 이해하는가?
- 주어진 연립방정식의 해를 구할 수 있는가?

[문제 2-2]
- 벡터의 평행을 이용하여 거리를 계산할 수 있는가?

[문제 2-3]
- 내적을 이용하여 두 벡터 사이의 각에 대한 정보를 얻어낼 수 있는가?
- 삼각함수 사이의 관계를 이해하는가?

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	[기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 1) 벡터의 연산 ① 벡터의 뜻을 안다. ② 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 2) 평면벡터의 성분과 내적 ① 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. ② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 1) 벡터의 연산 기벡1211/1212. 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 2) 평면벡터의 성분과 내적 기벡1221. 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. 기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문제 2-1	교육과정	[기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 1) 벡터의 연산 ① 벡터의 뜻을 안다. ② 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 2) 평면벡터의 성분과 내적 ① 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. [수학 I] - 나. 방정식과 부등식 - 1) 복소수와 이차방정식 ③ 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 1) 벡터의 연산 기벡1211/1212. 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 2) 평면벡터의 성분과 내적 기벡1221. 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. [수학 I] - 나. 방정식과 부등식 - 1) 복소수와 이차방정식 수학1212/1213. 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알고, 판별식의 의미를 설명할 수 있다.
문제 2-2	교육과정	[기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 1) 벡터의 연산 ① 벡터의 뜻을 안다. ② 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 2) 평면벡터의 성분과 내적 ① 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 1) 벡터의 연산 기벡1211/1212. 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 2) 평면벡터의 성분과 내적 기벡1221. 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
문제 2-3	교육과정	[기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 2) 평면벡터의 성분과 내적 ② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. [미적분 II] - 나. 삼각함수 - 1) 삼각함수의 뜻과 그래프 ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - 나. 평면벡터 - 2) 평면벡터의 성분과 내적 기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. [미적분 II] - 나. 삼각함수 - 1) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2212-1. 삼각함수의 뜻을 알고, 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	황선욱 외	좋은책 신사고	2014	52-80
	기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2014	53-90
	미적분 II	류희찬 외	천재교과서	2014	58-66
	미적분 II	김창동 외	교학사	2014	55-74
	수학 I	황선욱 외	좋은책 신사고	2014	56-58
	수학 I	정상권 외	금성출판사	2014	63-66

5. 문항 해설

보트가 흐르는 강을 건너는 상황에서 보트의 이동을 평면벡터의 개념을 통해 이해하고, 벡터의 합과 속도, 그리고 벡터의 평행 등의 개념을 이용하여 주어진 문제의 답을 구할 수 있는 지를 평가한다. 또한 강물이 멈추는 변화된 상황을 이해하고, 벡터의 내적과 평행의 개념을 통해 주어진 문제의 답을 구할 수 있는 지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	① 두 벡터가 평행이라는 사실을 제시하는 경우 ((1)의 이유를 제시) ② 식 (1)을 얻어내는 경우 ③ 벡터의 속력이 4m/s 라는 조건을 제시하는 경우 ((2)의 이유를 제시) ④ 식 (2)를 얻어내는 경우 --------------------------- A+: a, b의 값을 계산하기까지의 과정이 옳고, 풀이를 문장으로 조리 있게 설명함 A: a, b의 값을 구함 (즉, (5), (6)을 얻어냄) B+: a의 값을 구함 (즉, (5)를 얻어냄) B: (3)을 얻어냄 C: ①, ②, ③, ④ 를 모두 기재 D: ①, ②, ③, ④ 중 2개를 기재 E: 문제의 의미를 알지 못함	34

2-2	① 벡터 $\overrightarrow{CB'}$ 와 보트의 속도 $\vec{v}$가 평행함을 제시하는 경우 ② $\overrightarrow{CB'}=(d+50,50)$을 계산하는 경우 --------------------------- A+: d를 계산하기까지의 과정이 옳고, 풀이를 문장으로 조리 있게 설명하는 경우 A: d를 계산하는 경우 (즉, (10)을 얻어내는 경우) B+: d에 관한 식을 올바르게 계산하는 경우 (즉 (8),(9)과 같거나 유사한 식을 얻어냄) B: ①, ②를 모두 기재하고, 풀이를 문장으로 조리 있게 설명하는 경우 C: ①, ②를 모두 기재 D: ①, ② 중 1개를 기재 E: 문제의 의미를 알지 못하는 경우	33
2-3	① $\cos\theta$에 대한 식인 (11)을 제시하는 경우 ② $\vec{v}\cdot(1,1)=\sqrt{31}$ 또는 $\vec{v}\cdot(100,100)=100\sqrt{31}$를 계산하는 경우 ------------------------- A+: $\tan\theta$를 계산하고, 풀이를 문장으로 조리 있게 설명함 A: $\tan\theta$를 계산하는 경우 B+: $\cos\theta$를 계산하기까지의 과정이 옳고, 풀이를 문장으로 조리 있게 설명함 B: $\cos\theta$를 계산하는 경우 (즉 (12)를 얻어내는 경우) C: ①, ②를 모두 기재 D: ①, ② 중 1개를 기재 E: 문제의 의미를 알지 못하는 경우	33

7. 예시 답안

[문제 2-1]

$\vec{v}=(a,b)$에 관한 첫 번째 식은 보트의 속도와 강물의 속도의 합 벡터가 $\overrightarrow{AB}=(100,100)$과 평행이라는 사실에서 얻을 수 있다. 즉, $(a,b)+(-1,0)=(a-1,b)$이 $(1,1)$[2]과 평행이므로,

$$a-1=b \qquad \text{--------------------------(1)}$$

를 만족한다.

$\vec{v}=(a,b)$에 관한 두 번째 식은 보트가 최대 속력 4m/s로 이동한다는 조건에서 얻을 수 있다. 즉, $|\vec{v}|=\sqrt{a^2+b^2}=4$ 이므로

$$a^2+b^2=16 \qquad \text{---------------------------(2)}$$

을 만족한다.

이제 (1)과 (2)를 연립하여 $\vec{v}=(a,b)$를 계산해 보자. (1)을 (2)에 대입하면 $a^2+(a-1)^2=16$을 얻을 수 있다. 이를 전개하면

2) $(1,1)$ 대신에 $(100,100)$을 이용해도 무방하다.

$$2a^2-2a-15=0 \text{ -----------------------(3)}$$

이다. 이차방정식의 근의 공식에 의해

$$a=\frac{1\pm\sqrt{31}}{2} \text{ -----------------------(4)}$$

이다. 그리고 $a>0$ 이므로

$$a=\frac{1+\sqrt{31}}{2} \text{ -----------------------(5)}$$

이다. 이를 (1)에 대입하면

$$b=a-1=\frac{-1+\sqrt{31}}{2} \text{ ------------------(6)}$$

을 얻을 수 있다. 결론적으로

$$\vec{v}=(a,b)=\left(\frac{\sqrt{31}+1}{2},\frac{\sqrt{31}-1}{2}\right) \text{ ----------------(7)}$$

이다.

[문제 2-2]

강의 중간 지점을 C 라 하면 벡터 $\overrightarrow{CB'}$ 과 보트의 속도 $\vec{v}$는 평행하다. $\overrightarrow{CB'}=(d+50,50)$이고 $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{31}+1}{2},\frac{\sqrt{31}-1}{2}\right)$ 이므로, 비례식을 이용하면

$$(d+50):50=\frac{\sqrt{31}+1}{2}:\frac{\sqrt{31}-1}{2} \text{ ---------------(8)}$$

을 만족한다. 그러므로

$$(\sqrt{31}-1)(d+50)=(\sqrt{31}+1)50 \text{ ---------------(9)}$$

이고, 계산하면

$$d=\frac{100}{\sqrt{31}-1} \quad \text{이므로} \quad d=\frac{10}{3}(\sqrt{31}+1) \quad \text{-----------(10)}$$

이다.

[문제 2-3]

각 $\angle BCB'=\theta$는 두 벡터 $\vec{v}$ 와 (1,1) 사이의 각이다.[3] 그러므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\bullet(1,1)}{|\vec{v}||(1,1)|} \quad \text{-------------------(11)}$$

이다. $|\vec{v}|=4, |(1,1)|=\sqrt{2}$ 이고, 또한

$$\vec{v}\bullet(1,1)=\left(\frac{\sqrt{31}+1}{2},\frac{\sqrt{31}-1}{2}\right)\bullet(1,1)=\sqrt{31}$$

이다. 그러므로

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{31}}{4\sqrt{2}} \quad \text{이므로} \quad \cos\theta=\frac{\sqrt{62}}{8} \quad \text{-------------(12) 이다.}$$

<참고: (12)를 얻기 위한 다른 풀이>: (1,1)대신에 (100,100)을 사용하는 경우

각 $\angle BCB'=\theta$는 두 벡터 $\vec{v}$ 와 (100,100) 사이의 각이다. 그러므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\bullet(100,100)}{|\vec{v}||(100,100)|} \quad \text{-------------------(11)}$$

이다. $|\vec{v}|=4, |(100,100)|=100\sqrt{2}$ 이고, 또한

$$\vec{v}\bullet(100,100)=\left(\frac{\sqrt{31}+1}{2},\frac{\sqrt{31}-1}{2}\right)\bullet(100,100)=100\sqrt{31}$$

이다. 그러므로

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{31}}{4\sqrt{2}} \quad \text{이므로} \quad \cos\theta=\frac{\sqrt{62}}{8} \quad \text{-----------(12) ‘}$$

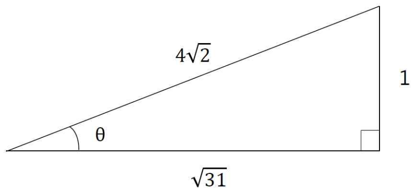
이다.

3) (1,1) 대신에 (100,100)을 이용한 풀이도 가능하다. 그 풀이는 박스 안에 정리하였다.

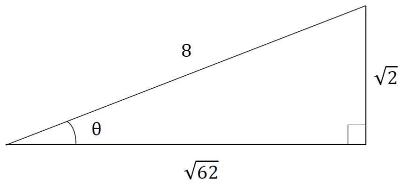
이제 $\tan\theta$를 구해보자. 아래 두 가지 방법이 가능하다.

<방법 1>

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{62}}{8}$ 인 직각삼각형을 그려보면



또는



이다. 그러므로

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{62}} = \frac{1}{\sqrt{31}} = \frac{\sqrt{31}}{31}$$

이다.

<방법 2>

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

이므로

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{32}{31} - 1 = \frac{1}{31}$$

를 만족한다. 각 θ가 예각이므로 $\tan\theta > 0$ 이다. 따라서

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{31}} \quad \text{이므로} \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{31}}{31}$$

이다.

[덕성여자대학교 문항정보 9]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열 / 문항번호 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>교육과정 과목명</td><td>수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 확률과 통계, 미적분Ⅱ</td></tr>
<tr><td>핵심 개념 및 용어</td><td>이차방정식의 판별식, 등비수열의 합, 상용로그, 확률, 이산확률변수, 확률질량함수, 복원추출, 임의추출, 지수부등식</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">40분 / 120분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

다음의 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

(1) 숫자 1, 2, 3 중 하나가 적힌 구슬 30개가 들어 있는 주머니가 있다. 이들 30개의 구슬 중 1이 적혀 있는 구슬이 l개, 2가 적혀 있는 구슬이 m개, 3이 적혀 있는 구슬이 n개 있다. 이 주머니에서 복원추출로 3개의 구슬을 임의추출할 때, 첫 번째 추출된 구슬에 적힌 숫자를 a, 두 번째 추출된 구슬에 적힌 숫자를 b, 그리고 세 번째 추출된 구슬에 적힌 숫자를 c라 하고, 그 a, b, c를 이용하여 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$을 만든다.

(2) 복원추출로 3개의 구슬을 (1)의 주머니에서 임의추출하여 하나의 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$을 만드는 것을 한 번의 시행이라고 하자. 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$이 처음으로 중근을 가질 때까지 이 시행을 반복한다. 10회 시행할 때까지 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$이 중근을 가지지 못하게 되면 더 이상 시행을 하지 않는다.

[문제 3-1]
(1)에서 숫자 3을 가지는 구슬의 갯수 n이 10이라고 할 때, (1)처럼 복원추출로 3개의 구슬을 임의추출하여 만든 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$이 중근을 가질 확률이

최소가 되게 하는 l과 m을 풀이와 함께 구하시오.[40점]

[문제 3-2]
(2)에서 설명한 시행의 횟수를 확률변수 X라 하자. [문제 3-1]에서 구한 각 숫자의 구슬의 갯수를 사용하여 X의 확률질량함수를 풀이와 함께 구하시오.[35점]

[문제 3-3]
[문제 3-2]의 확률변수 X가 k보다 클 확률이 0.5 보다 작게 되는 자연수 k의 최솟값을 풀이와 함께 구하시오.[25점]

(단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$로 계산한다.)

3. 출제 의도

제시문 (1)에서 설명한 주머니에서 복원추출로 3개의 구슬을 임의추출하여 얻어진 a, b, c로 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$를 만들었을 때, 다음 사항들을 해결할 수 있는 지를 알아본다.
- 추출된 a, b, c가 독립시행에 의한 것임을 알고, 이 a, b, c가 어떤 관계일 때 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$이 중근을 가지게 되는 지를 파악할 수 있는 지를 알아본다.
- 추출된 a, b, c가 만든 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$이 중근이 되는 관계에 대한 확률을 주머니 속 전체 구슬의 갯수 중에 각 숫자가 적힌 구슬의 갯수의 비로 계산되는 확률들로 표현할 수 있는 지를 알아본다.
- 이렇게 만든 이차방정식이 처음으로 중근을 가질 때까지 복원추출로 3개의 구슬을 임의추출하는 시행 횟수의 확률변수를 이해하고, 그 확률변수의 확률질량함수를 구할 수 있는 지를 알아본다. 이때의 시행 횟수는 10회를 넘지 않게 함으로써 이산확률변수가 가질 수 있는 값의 갯수를 유한개로 제한하여 교과과정 내에서 풀이할 수 있도록 한다.
- 시행 횟수의 확률질량함수를 이용하여 시행 횟수가 k번 보다 크게 될 확률이 0.5 이하가 되는 최소의 k를 찾는 간단한 응용 문제를 지수부등식과 상용로그를 활용하여 풀 수 있는 지를 알아본다.

각 소문제별 구체적인 출제의도는 다음과 같다.

[문제 3-1]
주머니 속 각 숫자에 대한 확률변수의 확률분포를 서술할 수 있는가?
복원추출로 a, b, c로 만들어진 모든 가능한 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$들 중 중근

이 되는 경우를 찾을 수 있는가?
복원추출로 세 숫자를 임의 추출하는 것이 독립시행임을 알고, 중근이 될 확률을 각 숫자에 대한 확률변수의 확률분포로 정확히 표현할 수 있는가?
중근이 될 확률을 최소가 되게 하는 각 숫자가 적힌 구슬의 갯수를 구할 수 있는가?

[문제 3-2]
주머니 속 각 숫자의 갯수를 알 때 중근이 될 확률을 구할 수 있는가?
확률변수 X를 정확히 이해하고 X가 가질 수 있는 값을 구할 수 있는가?
X의 확률질량함수를 구할 수 있는가?

[문제 3-3]
1. $P(X>k)$의 확률을 등비수열의 합을 이용하여 구할 수 있는가?
2. 지수부등식으로 표현된 확률을 상용로그로 풀어 자연수 k를 구할 수 있는가?

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	[수학Ⅰ]-(나) 방정식과 부등식-1) 복소수와 이차방정식 ③ 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률-2) 조건부확률 ② 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅰ]-(나) 방정식과 부등식-1) 복소수와 이차방정식 수학1212/1213. 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알고, 판별식의 의미를 설명할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률-2) 조건부확률 확통1222-2. 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
3-1	교육과정	[수학Ⅰ]-(나) 방정식과 부등식-1) 복소수와 이차방정식 ③ 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [수학Ⅰ]-(나) 방정식과 부등식-1) 이차방정식과 이차함수 ③ 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률-1) 확률의 뜻과 활용 ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. ② 확률의 기본 성질을 이해한다. ③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률-2) 조건부확률 ② 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [확률과 통계]-(다) 통계-1) 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
	성취기준·성취수준	[수학Ⅰ]-(나) 방정식과 부등식-1) 복소수와 이차방정식 수학1212/1213. 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알고, 판별식의 의미를 설명할 수 있다. [수학Ⅰ]-(나) 방정식과 부등식-1) 이차방정식과 이차함수

		수학1223. 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률-1) 확률의 뜻과 활용 확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다. 확통1213. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률-2) 조건부확률 확통1222-2. 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계]-(다) 통계-1) 확률분포 확통1311-1. 이산확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
3-2	교육과정	[수학I]-(나) 방정식과 부등식-1) 복소수와 이차방정식 ③ 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률-1) 확률의 뜻과 활용 ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다 ② 확률의 기본 성질을 이해한다. ③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률-2) 조건부확률 ② 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [확률과 통계]-(다) 통계-1) 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
	성취기준· 성취수준	[수학I]-(나) 방정식과 부등식-1) 복소수와 이차방정식 수학1212/1213. 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알고, 판별식의 의미를 설명할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률-1) 확률의 뜻과 활용 확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다. 확통1213. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률-2) 조건부확률 확통1222-2. 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계]-(다) 통계-1) 확률분포 확통1311-1. 이산확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
3-3	교육과정	[수학II]-(다) 수열-1) 등차수열과 등비수열 ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [수학II]-(라) 지수와 로그-1) 로그 ② 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률-1) 확률의 뜻과 활용 ④ 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계]-(다) 통계-1) 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [미적분II]-(가) 지수함수와 로그함수-1) 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 ② 지수함수와 로그함수의 그래프를 그려보고, 그 성질을 이해한다.
	성취기준· 성취수준	[수학II]-(다) 수열-1) 등차수열과 등비수열 수학2313-2. 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. [수학II]-(라) 지수와 로그-1) 로그 수학2422. 상용로그를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. [확률과 통계]-(나) 확률-1) 확률의 뜻과 활용 확통1214. 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계]-(다) 통계-1) 확률분포 확통1311-1. 이산확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [미적분II]-(가) 지수함수와 로그함수-1) 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 미적2112-1. 지수함수의 그래프를 그려보고, 그 성질을 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	수학I	김원경 외 12인	비상교육	2017	56, 57, 72, 73
	수학II	김원경 외 12인	비상교육	2017	124, 125, 177, 178
	확률과 통계	이준열 외 9인	천재교육	2017	94, 95, 126, 138, 139, 140, 172, 173, 174
	확률과 통계	신항균 외 11인	지학사	2017	78, 91, 103, 104, 105, 135, 136, 144, 145, 146, 147, 148
	미적분II	김원경 외 12인	비상교육	2017	19, 20, 21
기타	EBS 수능특강-확률과 통계	권백일 외 3인	EBS	2017	47, 79

5. 문항 해설

[문제 3-1]
제시문 (1)은 주머니에서 복원추출로 3개의 구슬을 임의추출하여 그들 구슬에 적힌 숫자로 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$을 만드는 과정을 설명하고 있다. 주머니 안의 30개의 구슬 중 3이 적힌 구슬의 수가 10일 때, 주머니에서 복원추출로 임의추출된 3개의 구슬에 적힌 숫자로 만들어진 이차방정식이 중근을 갖게 되는, a, b, c가 어떤 관계인지를 파악한다. 이 관계가 성립하는 확률을 주머니 속 전체 구슬의 갯수 중에 각 숫자가 적힌 구슬의 갯수의 비로 계산되는 확률들로 표현한다. 구해진 중근이 될 확률을 최소로 하는 숫자 1과 2의 각 구슬의 갯수를 구한다.

[문제 3-2]
[문제 3-1]에서 구한 숫자 1과 2의 개수는 각각 10이다. 이때 이차방정식이 중근을 가지게 되는 경우의 확률은 $\frac{1}{9}$이 된다는 것을 풀이에 이용한다. 제시문 (2)에 설명하였듯이 이차방정식이 처음으로 중근을 가질 때까지 복원추출로 3개의 구슬을 임의추출하는 시행의 횟수를 확률변수로 이해하고 그 확률변수의 확률질량함수를 구한다. 1회에서 9회까지 시행에 대한 확률은 규칙성이 있으나, 이때의 시행 횟수는 10회를 넘지 않기 때문에 10회가 되는 확률은 10회에 만들어진 이차방정식이 중근을 가지는 경우와 10회에도 중근을 자기지 못하는 경우를 모두 고려하여 계산한다.

[문제 3-3]

[문제 3-2]에서 구해진 확률질량함수를 이용하여 시행의 횟수가 k보다 클 확률을 등비수열의 합을 이용하여 구한다. 이 확률이 0.5보다 작게 되는 부등식을 주어진 상용로그의 값을 이용하여 최소의 자연수 k를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	중근이 될 확률이 숫자 1, 2 중 한 숫자가 적힌 구슬의 갯수로 표현한 확률로 표현할 수 있고, 중근이 될 확률이 최소가 되게 하는 한 방법을 사용하여 숫자 1과 2가 적힌 구슬의 갯수를 구할 수 있다. 풀이 과정에서 사용된 방법이 구체적으로 서술되고 “예시답안”처럼 숫자 1 혹은 2의 확률이 0과 2/3 사이라는 것, 두 확률의 합이 2/3이라는 것 등 조건을 구체적으로 잘 설명할 수 있다.	A+
	중근이 될 확률을 숫자 1, 2 중 한 숫자가 적힌 구슬의 갯수로 표현한 확률로 표현할 수 있고, 중근이 될 확률이 최소가 되게 하는 한 방법을 사용하여 숫자 1과 2가 적힌 구슬의 갯수를 구할 수 있다.	A
	주머니 속 각 숫자에 대한 확률변수의 확률분포를 서술하고, 이 확률분포를 이용하여 중근이 될 확률을 계산할 수 있다. 풀이 과정에서 독립시행, 확률분포(확률질량함수) 등의 용어를 사용하며 그렇게 되는 이유를 들어 서술할 수 있다.	B+
	주머니 속 각 숫자에 대한 확률변수의 확률분포를 서술하고, 이 확률분포를 이용하여 중근이 될 확률을 계산할 수 있다.	B
	추출된 a,b,c를 이용하여 만든 이차방정식이 중근을 가지는 a,b,c가 어떤 숫자인지 정도만 안다.	C
	세 숫자 a,b,c의 추출의 의미 정도만 안다.	D
	문제의 의미를 알지 못한다.	E
3-2	시행횟수인 확률변수 X를 이해하고, k번째 시행에서 중근이 나올 확률을 $X=1,2,\cdots,10$까지 정확히 구할 수 있다. 풀이 과정에서 독립시행 등의 용어를 사용하며 그렇게 되는 이유를 들어 서술할 수 있다.	A+
	시행횟수인 확률변수 X를 이해하고, k번째 시행에서 중근이 나올 확률을 $X=1,2,\cdots,10$까지 정확히 구할 수 있다.	A
	시행횟수인 확률변수 X를 이해하고, k번째 시행에서 중근이 나올 확률을 $X=1,2,\cdots,9$까지 정확히 구할 수 있다. 10번의 시행횟수 $X=10$에 대한 확률을 10번째 시행에서 중근이 나온 확률이나, 10번째 시행까지 모두 실패한 확률로만 잘못 계산한다.	B+
	시행횟수인 확률변수 X를 이해하고, 중근이 될 확률을 성공의 확률로 간주하여 $X=1,2,\cdots,9$의 확률을 정확히 구할 수 있다.	B
	각 숫자에 대한 확률변수의 확률분포를 이용하여, 중근이 될 확률을 구체적으로 구할 수 있다.	C
	[문제 3-1]에서 구한 구슬에 적힌 각 숫자의 구슬의 개수를 이용하여, 각 숫자에 대한	D

	확률변수의 확률분포만 서술할 수 있다.	
	문제의 의미를 알지 못한다.	E
3-3	$P(X>k)$의 계산을 등비수열의 합으로 계산할 수 있고, $P(X>k)<0.5$의 계산을 상용로그 값을 이용하여 정확한 k의 범위를 구하여 최소의 자연수 k를 구할 수 있다. 풀이 과정에서 여사건의 확률 등의 용어를 사용하며 그렇게 되는 이유를 들어 서술할 수 있다.	A+
	$P(X>k)$의 계산을 등비수열의 합으로 계산할 수 있고, $P(X>k)<0.5$의 계산을 상용로그 값을 이용하여 정확한 k의 범위를 구하여 최소의 자연수 k를 구할 수 있다.	A
	$P(X>k)$의 계산을 등비수열의 합으로 계산할 수 있고, $P(X>k)<0.5$의 계산을 상용로그를 취하지만 정확히 풀지는 못한다.	B+
	$P(X>k)$을 여사건의 확률을 이용하여 등비수열의 합으로 계산할 수 있다.	B
	$P(X>k)$의 계산을 하지만, 정확히 구하지는 못한다.	C
	$P(X>k)<0.5$ 계산을 위한 식만 적을 수 있다.	D
	문제의 의미를 알지 못한다.	E

※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안

[문제 3-1]
확률변수 Y를 주머니 속 구슬에 적힌 숫자라 하고 $P(Y=y)$를 확률변수 Y가 어떤 값 y를 가질 확률이라고 하자. 주머니 속 30개의 구슬 중 숫자 1, 2, 3이 적힌 구슬의 갯수가 각각 l, m, 10이므로 $P(Y=1)=\frac{l}{30}$, $P(Y=2)=\frac{m}{30}$, $P(Y=3)=\frac{10}{30}$이 되고 이를 정리하면 Y의 확률분포는 다음과 같다.

<표 1. 확률변수 Y의 확률분포표>

Y	1	2	3	합계
$P(Y=y)$	p	q	$\frac{1}{3}$	1

여기서 $p=\frac{l}{30}$, $q=\frac{m}{30}$이고 $p+q=\frac{2}{3}$을 만족한다.
임의추출된 a, b, c에 의해 만들어진 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$이 중근을 가지는 경우는 판별식 $D=b^2-ac$가 0이 되어야 하므로 $b^2=ac$가 되는 경우들이다. 즉, $b=1$인 경우에는 $a=1$과 $c=1$이어야 하며, $b=2$인 경우에는 $a=2$와 $c=2$가 추출되어야 하고, $b=3$인 경우에는 $a=3$과 $c=3$이 추출되는 경우만이 이에 해당된다. 그러

므로 a, b, c가 모두 1이거나, 모두 2이거나 혹은 모두 3이면 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$이 중근을 가진다.
한편, 3개의 구슬을 복원추출로 임의추출할 경우 각각의 추출은 독립시행이므로 위 <표 1>의 확률분포표를 이용하면 a, b, c가 모두 1이 될 확률은 p^3, 모두 2가 될 확률은 q^3, 그리고 모두 3이 될 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^3$이 된다. 그러므로 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$이 중근을 가질 확률은 $p^3+q^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3$이 되며, 이 확률은 $p+q=\frac{2}{3}$의 관계에 의해서 $p^3+\left(\frac{2}{3}-p\right)^3+\frac{1}{27}$된다. 이 확률은

$$\begin{aligned}
&p^3+\left(\frac{2}{3}-p\right)^3+\frac{1}{27}\\
&=p^3+\frac{8}{27}-3\times\frac{4}{9}p+3\times\frac{2}{3}p^2-p^3+\frac{1}{27}\\
&=2p^2-\frac{4}{3}p+\frac{1}{3}\\
&=2\left(p-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{9}
\end{aligned} \qquad \text{----------(1)}$$

이 된다. 여기서 $0 \le p \le \frac{2}{3}$이다. 그러므로 $p=\frac{1}{3}$이 될 때 이차방정식이 중근을 가질 확률이 최소가 되다. 따라서 $p+q=\frac{2}{3}$이므로 $q=\frac{1}{3}$이며, 이 때 1과 2가 적힌 구슬의 각각의 갯수는 $l=m=10$이 된다.

[문제 3-2]
복원추출로 3개의 구슬을 임의추출하여 만든 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$ 이 중근을 가지는 경우는 [문제 3-1]의 모범답안에서 설명하였듯이 a, b, c가 모두 1이거나, 모두 2이거나 혹은 모두가 3인 경우이다. 또한, [문제 3-1]의 결과에 의하면 세 숫자의 갯수는 $l=m=n=10$이다. 따라서, 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$ 이 중근을 가지는 경우의 확률은 [문제 3-1]의 식 (1)의 결과에 의해 $\frac{1}{9}$이다.
한편, 제시문 (2)에 설명된 시행의 횟수로 정의된 확률변수 X는 $1, 2, \cdots, 10$ 을 가질 수 있다. $P(X=k)$를 확률변수 X가 어떤 값 k를 가질 확률이라 하면, 10보다 작은 자연수 k에 대하여, $(k-1)$번 시행까지는 추출된 (a,b,c)가 중근을 만들지 못하고 k번 시행에서 추출된 (a,b,c)가 중근을 만들기 때문에 다음과 같이 $P(X=k)$가 구해진다.

$$P(X=1)=\frac{1}{9},\quad P(X=2)=\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}, \qquad \text{----------(2)}$$

$$P(X=3)=\left(\frac{8}{9}\right)^2\times\frac{1}{9},\cdots,\quad P(X=9)=\left(\frac{8}{9}\right)^8\times\frac{1}{9} \qquad \text{----------(3)}$$

10번째까지 시행을 한 경우의 확률은 10번째 시행에서 추출된 a, b, c가 중근을 만들 확률과 10번째 시행까지 만들어진 a, b, c 모두가 중근을 만들지 못할 확률을 더해준 것으로 다음과 같다.

$$P(X=10)=\left(\frac{8}{9}\right)^9\times\frac{1}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^{10}=\left(\frac{8}{9}\right)^9 \qquad \text{----------(4)}$$

그러므로, 식 (2), (3)과 (4)을 종합해보면 확률변수 X의 확률질량함수는 다음과 같이 된다.

$$P(X=k)=\begin{cases}\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\times\left(\frac{1}{9}\right), & (k=1,2,\cdots,9)\\ \left(\frac{8}{9}\right)^{9}, & (k=10)\end{cases}. \qquad \text{----------(5)}$$

[문제 3-3]

중근이 나올 때까지 시행횟수가 k보다 클 확률을 구해보자. 만약 $k<10$이라 하면, [문제 3-2]의 식 (5)에 있는 X의 확률질량함수를 이용하여 계산하면

$$\begin{aligned}P(X>k)&=1-P(X\le k)\\&=1-\frac{1}{9}\left(\frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^k}{1-\frac{8}{9}}\right)\\&=\left(\frac{8}{9}\right)^k\end{aligned}$$

----------(6)

이다. 그러므로 $P(X>k)=\left(\frac{8}{9}\right)^k<0.5$ 을 계산하기 위하여 양변에 상용로그를 취하면 $k(\log 8-\log 9)<\log 0.5$ 가 된다. 따라서

$$k(\log 8-\log 9)<\log 0.5$$

$$k(3\log 2-2\log 3)<-\log 2$$

$$k>\frac{\log 2}{2\log 3-3\log 2}=\frac{0.30}{2\times 0.48-3\times 0.30}=\frac{0.30}{0.06}=5 \qquad \text{----------(7)}$$

가 성립한다. 구하는 최소의 자연수 k는 6이 된다.