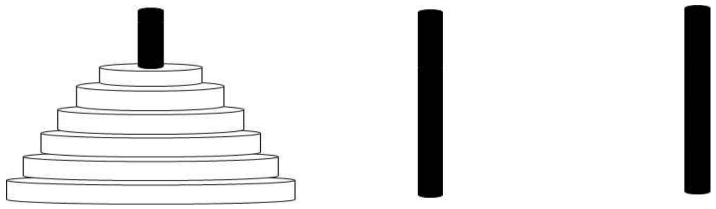
모의 논술고사 문제 (자연계열)

▢ 문제 1

다음 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.

하노이의 탑이라 불리는 퍼즐은 세 개의 기둥과 n개의 크기가 다른 원반으로 구성되어 있다. 처음에는 아래의 그림과 같이 왼쪽 기둥에 n개의 원반이 놓여 있다. 이 때 가장 큰 원반이 바닥에 있고, 위로 갈수록 원반이 작아지는 순으로 놓여 있다. 원반을 이동하여 오른쪽 기둥에 처음과 같은 순서대로 원반을 놓으면 퍼즐은 해결된다. 원반의 이동시에는 매번 하나만의 원반을 이동할 수 있으며, 각 과정에서 작은 원반 위에 큰 원반이 놓일 수 없다.



〈그림〉 원반들의 초기 위치

n개의 원반을 가진 하노이 탑 퍼즐을 풀기 위한 원반의 최소 이동 횟수를 H_n이라 하자.

【문제 1-1】
원반이 3개인 경우에 최소 횟수로 원반을 이동하여 하노이 탑 퍼즐을 해결하는 방법을 설명하시오. (5점)

【문제 1-2】
$H_{n+1} = 2H_n + 1 \ (n \geq 1)$이 성립한다고 가정할 때, H_{100}을 구하시오. (6점)

【문제 1-3】
$H_{n+1} \geq 2H_n + 1 \ (n \geq 1)$을 증명하시오. (4점)

모의 논술고사 문제 해설 및 예시답안(자연계열)

▢ 문제 1

1. 출제 의도

【문제 1-1】
주어진 퍼즐의 조건과 목표를 이해하는가?
간단한 경우에 대한 퍼즐의 목표를 해결할 수 있는가?

【문제 1-2】
수열의 귀납적 정의를 이해하는가?
수열의 귀납적 정의로부터 주어진 항을 구할 수 있는가?

【문제 1-3】
H_n의 정의를 이해하는가?
주어진 상황으로부터 수열의 귀납적 정의와 관련된 부등식을 이끌어내는가?

2. 문제 해설

주어진 규칙과 목표를 가진 퍼즐에 대한 이해력을 묻고, 퍼즐과 관련된 값을 수열의 귀납적 정의를 이용하여 구할 수 있는 지를 묻는다.

3. 채점 기준

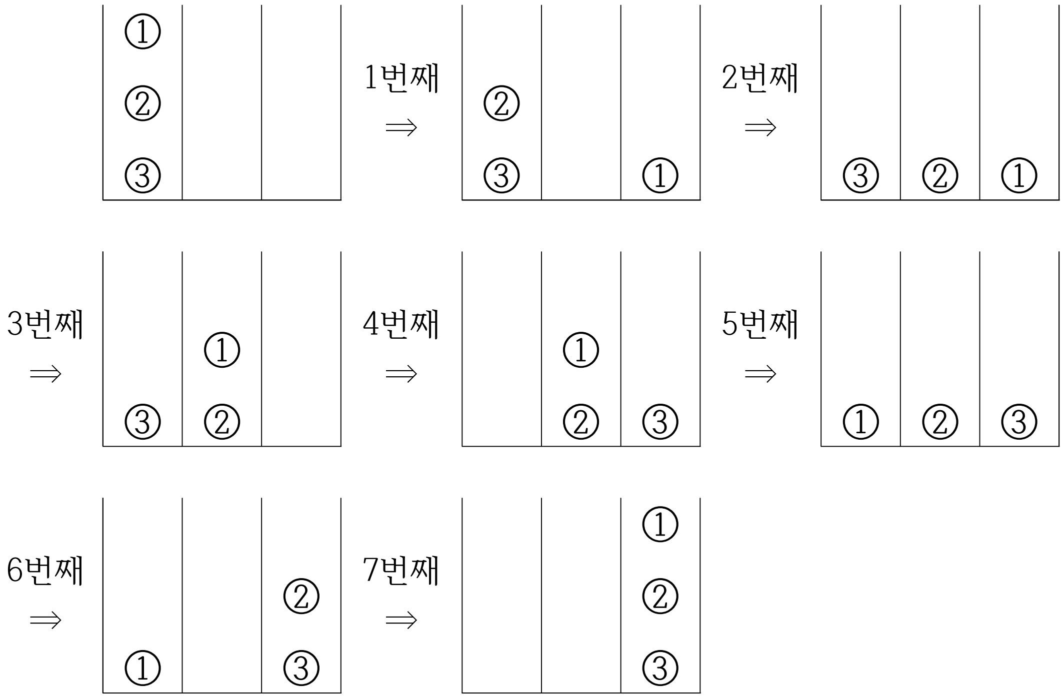
하위 문항	채점 기준	배점
	(1) 채점기준 A. 풀이가 맞고, 방법을 그림이나 설명을 통해 이해가 쉽도록 조리 있게 기술했다. C. 풀이가 맞으나, 방법 설명이 조리 있지 못하다. E. 질문에 대해 의미를 모른다. (2) 채점기준 A. 풀이가 맞고, 방법을 조리 있게 기술했다. B. 풀이가 맞으나, 방법 설명이 조리 있지 못하다. C. 풀이의 방향의 제시했으나, 문제를 해결하지 못했다. E. 질문에 대해 의미를 모른다. (3) 채점기준 A. 풀이가 모두 맞고, 증명을 조리 있게 기술했다. C. 풀이가 모두 맞으나, 증명이 조리 있지 못하다.	

	E. 질문에 대해 의미를 모른다.	

※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

4. 예시 답안

【문제 1-1】
원반을 크기순으로 ①<②<③ 이라 하자.



【문제 1-2】
세가지 답안을 제시한다.

<답안1>

$H_{100}=2H_{99}+1=2(2H_{98}+1)+1=2^2H_{98}+2+1=\cdots=2^{99}H_1+2^{98}+2^{97}+2^{96}+\cdots+2+1$
이 성립한다. $H_1=1$ 이므로,

$$H_{100}=2^{99}+2^{98}+2^{97}+2^{96}+\cdots+2+1=\frac{2^{100}-1}{2-1}=2^{100}-1$$ 이다.

<답안2> (등비수열을 이용)

$H_{n+1}+1=2(H_n+1)$을 만족한다. $a_n=H_n+1$ 이라 놓자. a_n은 첫째항과 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n\ \ (n\geq 1)$을 만족한다. 따라서 $H_n=a_n-1=2^n-1\ \ (n\geq 1)$이다.
그러므로 $H_{100}=2^{100}-1$ 이다.

<답안3> (수학적 귀납법을 이용)

먼저 관찰을 통해

$$H_n=2^n-1\ \ (n\geq 1) \qquad \text{---------------}\ (*)$$

을 추측할 수 있다. 이를 수학적 귀납법으로 증명해 보자.
(i) n=1 이면 $H_1=1$ 이므로 (*)가 성립한다.
(ii) n=k일 때 (*)가 성립한다고 가정하고 n=k+1일 때 (*)가 성립함을 보이자.
n=k일 때 (*)가 성립하므로 $H_k=2^k-1$이 성립한다. 그러므로

$$H_{k+1}=2H_k+1=2(2^k-1)+1=2^{k+1}-2+1=2^{k+1}-1$$

이다. 즉, n=k+1일 때 (*)가 성립한다.

【문제 1-3】
$H_{n+1}\geq 2H_n+1$을 증명하자.

n+1개의 원반을 가진 하노이 퍼즐을 해결하기 위해서는 맨 아래에 있는 가장 큰 원반을 오른쪽 기둥으로 옮겨야 한다. 이를 위해서는 그 위의 n개의 원반들이 모두 가운데 기둥에 위치해야 한다. 그러므로 적어도 H_n번의 이동이 필요하다. 그 후에 가장 큰 원반을 오른쪽 기둥으로 옮기는데 한번의 이동이 필요하다. 마지막으로 가운데 기둥에 있는 n개의 원반을 오른쪽 기둥으로 옮기는 데 또다시 적어도 H_n번의 이동이 필요하다. 모두 합하면 적어도 $2H_n+1$번의 이동이 필요하다.

▢ 문제 2

다음 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.

(1) 철수는 고향집에 차를 타고 다음과 같이 내려갔다. 출발시각부터 1시간 동안은 차가 막혀 $v(t)=a_1e^t+a_2$의 속도로 달려 고속도로에 들어섰다. 고속도로에 들어서면서부터 30분 동안 $v(t)=b_1t+b_2$의 속도로 달렸다. 이때 속도는 $60\,km/h$에서 $100\,km/h$가 되었다. 그 후 계속해서 그 속도를 유지하면서 2시간 30분을 달렸다. 그리고 고속도로를 벗어나 지방도로에 들어서면서 서서히 속도가 감소하여 $v(t)=c_1(t-4)^2+c_2$의 속도로 1시간 후 고향집에 도착하였다. 여기서 t는 출발 후 시간(hour)을 나타내며, 차는 정차하지 않고 계속하여 달렸다고 가정한다.

(2) 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x=f(t)$라고 할 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 $v(t)$는

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

(3) 정적분의 성질
세 실수 a,b,c를 포함하는 구간에서 함수 $f(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

【문제 2-1】
제시문 (1)의 주어진 상수 a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2의 값을 구하시오. (6 점)

【문제 2-2】
제시문과 【문제 2-1】를 이용하여 시간 t에 대한 속도 $v(t)$를 나타내고, $v(t)$의 그래프를 그리시오. (4 점)

【문제 2-3】
출발지로부터 고향집까지의 거리를 구하시오. (5 점)

모의 논술고사 문제 해설 및 예시답안(자연계열)

▢ 문제 2

1. 출제 의도

함수의 표현, 연속함수의 정의, 미분과 적분과의 관계, 그리고 응용문제로 속도와 거리를 측정할 수 있는지를 평가하고자 한다.

【문제 2-1】
주어진 조건과 연속함수의 성질을 이용하여 상수 값들을 찾을 수 있는지 평가한다.

【문제 2-2】
주어진 속도를 함수 표현 방법으로 나타낼 수 있으며, 속도의 그래프를 그릴 수 있는지를 평가한다.

【문제 2-3】
지수함수의 적분과 치환적분을 할 수 있으며, 정적분을 이용하여 거리를 구할 수 있는지를 평가한다.

2. 문제 해설

[문제2]는 적분의 활용으로 거리를 미분하면 속도가 되며, 속도를 적분함으로 거리를 구할 수 있다는 것을 알아보려고 한다. 속도를 다루는 경우 속도는 연속이 되며, 속도가 각 구간에 따라 다르게 나타날 경우에 이를 함수로 나타낼 수 있는지를 알아본다. 이때 거리를 구하기 위하여 적분을 각 구간으로 나누어 계산할 수 있으며, 지수적분과 치환적분을 할 수 있는지를 평가하려고 한다.

【문제 2-1】
제시문에 따라 속도는 연속함수가 됨을 알 수 있는지 평가한다. 또한 연속함수의 정의에 의하여 우리는 주어진 시간 구간이 만나는 양 끝점에서 같은 값을 갖는다는 것을 이용하여 주어진 미지수의 값을 정할 수 있는지를 평가한다.

【문제 2-2】
제시문과 【문제 2-1】에서 주어진 미지수의 값을 이용하여 속도 $v(t)$의 정의역은 $[0,5]$이고, 그 영역에서 주어진 함수를 나타내고 함수의 그래프를 그릴 수 있는지를 평가한다. 따라서 첫 구간 $[0,1]$에서는 지수함수가 되고, 구간 $[1,1.5]$에서는 직선이 되고, 구간 $[1.5,4]$에서는 상수함수가 되며, 마지막 구간 $[4,5]$에서는 위로 볼록한 이차함수가 된다는 것을 알고 있는지를 평가한다.

【문제 2-3】
【문제 2-2】에서 나누어진 구간에 따라서 정적분을 이용하여 거리를 구할 수 있는지 평가하며, 특별히 처음 구간 $[0,1]$에서 지수함수의 정적분을 구할 수 있으며, 마지막 구간 $[4,5]$에서 치환적분을 할 수 있는지 평가한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$t=0$에서 $v(0)=0$이고, $t=1$에서 $v(1)=60$인 것을 안다.	1
	$t=1$에서 $v(1)=60$이고, $t=1.5$에서 $v(1.5)=100$인 것을 안다.	1
	$t=1.5$에서 $t=4$까지 $v(t)=100$인 것을 안다.	1
	$t=4$에서 $v(4)=100$이고, $t=5$에서 $v(5)=0$인 것을 안다.	1
	$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$의 모든 값을 정확히 구할 수 있다.	2
2-2	정의역 $[0,5]$를 구간으로 각각 $[0,1]$, $[1,1.5]$, $[1.5,4]$, $[4,5]$로 나누어 함수를 나타낼 수 있어야 한다.	2
	지수함수와 일차 및 이차함수의 그래프를 연속이 되도록 그릴 수 있다.	2
2-3	거리를 구하기 위하여 구간을 나누어 정적분을 구할 수 있다.	2
	지수함수의 정적분을 할 수 있다.	1
	치환적분을 할 수 있다.	1
	구하는 거리를 정확히 구할 수 있다.	1

각 문항의 합산 점수를 기준으로 다음과 같은 배점을 적용한다.
문제 2-1) 6점: A, 5-4점: B, 3점: C, 2점: D, 1-0점: E
문제 2-2) 4점: A, 2점: C, 0점: E
문제 2-3) 5점: A, 4점: B, 3-2점: C, 1점: D, 0점: E
※ 하위 문제에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.
※ 채점 기준은 문제의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

4. 예시 답안

【문제 2-1】
속도 $v(t)$는 구간 $[0,1]$에서 정지 상태에서 1시간 후 $60(km/h)$이 되므로, $t=0$에서 0이고 $t=1$에서 속도가 $60(km/h)$이 된다. 즉
$v(0)=0,\ v(1)=60$
따라서 우리는 다음과 같은 연립방정식을 얻는다.
$v(0)=a_1e^0+a_2=a_1+a_2=0,\ v(1)=a_1e+a_2=60$
이를 풀면 다음을 얻는다.

$a_1 = \dfrac{60}{e-1}$, $a_2 = -\dfrac{60}{e-1} = \dfrac{60}{1-e}$

고속도로로 들어서면서부터 $v(t) = b_1 t + b_2$ 의 속도로 30분(0.5시간) 동안 $60\,km/h$로부터 $100\,km/h$가 되었으므로, 구간 $[1, 1.5]$에서 $v(1) = 60$, $v(1.5) = 100$이 된다. 따라서 다음 연립방정식

$v(1) = b_1 + b_2 = 60$, $v(1.5) = (1.5)b_1 + b_2 = 100$

을 풀면 $b_1 = 80$, $b_2 = -20$을 얻는다. 즉 구간 $[1, 1.5]$에서 속도는

$v(t) = 80t - 20$

이 된다.

같은 방법으로 지방도로에서는 구간 $[4, 5]$에서 $100(km/h)$에서 정지 상태가 되므로, $v(t) = c_1(t-4)^2 + c_2$ 로부터 다음 식을 얻는다. $v(4) = 100$, $v(5) = 0$. 따라서 우리는 다음과 같은 연립방정식을 얻는다.

$v(4) = c_1(4-4)^2 + c_2 = c_2 = 100$, $v(5) = c_1(5-4)^2 + c_2 = c_1 + c_2 = 0$

이를 풀면 다음을 얻는다. $c_1 = -100, c_2 = 100$. 즉 구간 $[4, 5]$에서 속도는 다음과 같다.

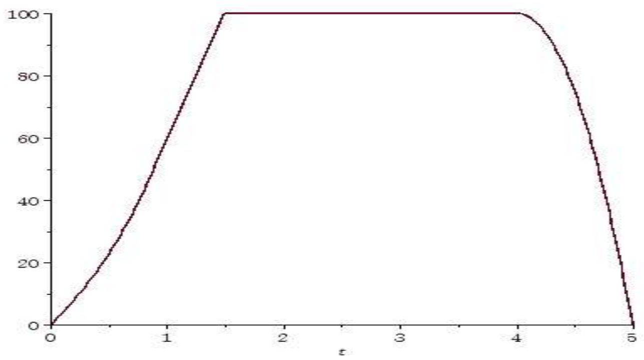
$v(t) = -100(t-4)^2 + 100$

【문제 2-2】

제시문으로부터 함수 $v(t)$의 정의역은 구간 $[0, 5]$이다. 따라서 함수 $v(t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{60}{e-1}\right)e^t + \left(\dfrac{60}{1-e}\right) & (0 \le t \le 1) \\ 80t - 20 & (1 \le t \le 1.5) \\ 100 & (1.5 \le t \le 4) \\ -100(t-4)^2 + 100 & (4 \le t \le 5) \end{cases}$$

따라서 $v(t)$의 그래프는 다음과 같다.



【문제 2-3】

구하는 거리를 s라 하자. 제시문 (2)와 (3)으로부터 거리 s는 속도를 적분하면 된다. 따라서 우리는 다음 적분을 구하면 된다.

$$s = \int_0^1 \left(\left(\frac{60}{e-1}\right)e^t + \left(\frac{60}{1-e}\right)\right)dt + \int_1^{1.5}(80t-20)\,dt + \int_{1.5}^4 100\,dt + \int_4^5(-100(t-4)^2+100)\,dt$$

처음 적분은 지수함수 적분이므로 간단히 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_0^1 \left(\left(\frac{60}{e-1}\right)e^t + \left(\frac{60}{1-e}\right)\right)dt = \left[\left(\frac{60}{e-1}\right)e^t + \left(\frac{60\,t}{1-e}\right)\right]_0^1 = \frac{60(e-2)}{e-1}$$

두 번째 적분은 다음과 같다.

$$\int_1^{1.5} (80\,t - 20)\,dt = \left[40\,t^2 - 20t\right]_1^{1.5} = 40$$

세 번째 적분은 간단히 사각형의 넓이인 $100 \times 2.5 = 250$, 또는 다음과 같다.

$$\int_{1.5}^{4} 100\,dt = [100\,t]_{1.5}^{4} = 250$$

마지막 적분은 치환적분을 이용하여 다음과 같이 구한다. ($x = t-4$로 치환하면 $dt = dx$이고 적분 구간은 $[4,5]$에서 $[0,1]$로 바뀌게 된다.)

$$\int_4^5 (-100(t-4)^2 + 100)\,dt = \int_0^1 (-100\,x^2 + 100)\,dx = \left[-\frac{100}{3}x^3 + 100\,x\right]_0^1 = \frac{200}{3}$$

따라서 구하는 거리는 다음과 같다.

$$\frac{1070}{3} + \frac{60(e-2)}{e-1}\ (km)$$

▢ 문제 3

다음 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.

어느 고등학교에서 전체 학생들의 키를 측정하고자 한다. 측정 기계의 정확도나 측정 시 학생들의 자세 등의 여러 가지 이유로 각 학생들의 실제 키를 정확히 측정하기는 힘들다. 다음의

$X=$실제 학생의 키-측정된 학생의 키

는 확률변수이고 정규분포 $N(1,16)$을 따른다고 할 때, 아래의 문항들을 다음의 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.(단, 키의 단위는 센티미터이다.)

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.25	0.10
0.50	0.19
0.52	0.20
1.17	0.38
1.28	0.40

【문제 3-1】
실제 학생의 키와 측정된 학생의 키의 차이가 1 이하가 될 확률을 구하시오. (5점)

【문제 3-2】
실제 학생의 키와 측정된 학생의 키의 차이가 1 이하일 때, 실제 학생의 키가 측정된 학생의 키보다 클 확률을 구하시오. (4점)

【문제 3-3】
이 고등학교에서 임의추출한 n명의 학생들의 표본평균 $\overline{X}$가 -1과 1사이에 있을 확률이 문항 1에서 구한 실제 학생의 키와 측정된 학생의 키의 차이가 1 이하일 확률보다 2배 이상 되게 하려면 최소 몇 명의 학생이 필요한지 구하시오. (6점)

모의 논술고사 문제 해설 및 예시답안(자연계열)

▢ 문제 3

1. 출제 의도

본 문제는 정규분포의 의미를 알고 표준정규분포표를 이용하여 주어진 상황의 확률을 구할 수 있는 지에 대해 평가하고자 한다.

1. 표준정규분포표를 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

2. 조건부확률의 개념을 이해할 수 있는가?

3. 모집단의 분포가 정규분포일 때, 표본평균의 표본분포를 알고 표준정규분포표를 이용하여 원하는 확률을 구할 수 있는가?

2. 문제 해설

【문제 3-1】

실제 학생들의 키-측정된 학생들의 키의 확률변수가 정규분포를 따를 때 실제 키와 측정된 키의 차이를 정규분포표를 이용하여 확률로 계산할 수 있는지 평가한다.

【문제 3-2】

실제 학생들의 키와 측정된 학생들의 키의 차이가 주어졌을 때, 실제 키가 더 클 확률인 조건부 확률을 이해하고 구할 수 있는지 평가한다.

【문제 3-3】

정규분포로부터 추출된 표본의 표본평균의 표본분포를 구할 줄 알고 이 분포를 이용하여 확률을 구하고 원하는 상황을 만들어내는 표본의 수를 구할 수 있는지 평가한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문항 1	문제의 의미를 알지 못한다	E
	문제의 의미 정도만 이해한다	D
	문제의 의미를 알지만 정규분포의 확률식으로 표현하지 못한다	C
	문제의 의미를 알고 정규분포 $N(1,16)$으로 확률을 서술하지만 표준화를 모르고 표준정규분포의 확률로 구하지 못한다	B
	문제의 의미를 알고 표준화를 이용하여 표준정규분포의 확률로 구한다	A
문항 2	문제의 의미를 알지 못한다	E
	조건부확률인 것 정도만 이해한다	D
	조건부확률인 것은 알지만 정규분포의 확률식으로 표현하지 못한다	C
	조건부확률인 것은 알고 정규분포 $N(1,16)$으로 확률을 서술하지만 표준화를 모르고 표준정규분포의 확률로 구하지 못한다	B
	조건부확률임을 이해하고 표준화를 이용하여 표준정규분포의 확률로 구한다	A
문항 3	문제의 의미를 알지 못한다	E
	표본평균이 의미와 표본분포를 아는 정도이다	D
	표본평균이 의미와 표본분포를 알지만 정규분포의 확률식으로 표현하지 못한다	C
	표본평균이 의미와 표본분포를 알고 정규분포 $N(1,16)$으로 확률을 서술하지만 표준화를 모르고 표준정규분포의 확률로 구하지 못한다	B
	표본평균이 의미와 표본분포를 알고 표준화를 이용하여 표준정규분포의 확률로 구한다	A

※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

4. 예시 답안

【문제 3-1】

실제 학생의 키와 측정된 학생의 키의 차이가 1인 경우는 $-1 \le X \le 1$일 확률과 같다. 즉, 주어진 표준정규분포표를 이용하면

$$P(-1 \le X \le 1) = P\left(\frac{-1-1}{4} \le \frac{X-1}{4} \le \frac{1-1}{4}\right)$$
$$= P(-0.5 \le Z \le 0) = P(0 \le Z \le 0.5) = 0.19$$

이다. 여기서 Z는 표준정규분포를 가지는 확률변수이다.

※ 위 풀이 과정의 모든 수식에서 등호를 제외하여도 무방함.

【문제 3-2】

실제 학생의 키가 측정된 학생의 키보다 큰 경우는 $0 \le X \le 1$인 경우이다. 그러므로, 실제 학생의 키와 측정된 학생의 키의 차이가 1일 때, 실제 학생의 키가 측정된 학생의 키보다 클 확률은 다음의 조건부확률

$$P(0 \le X \le 1 | -1 \le X \le 1) = \frac{P(0 \le X \le 1, -1 \le X \le 1)}{P(-1 \le X \le 1)} = \frac{P(0 \le X \le 1)}{P(-1 \le X \le 1)}$$

이 된다. 여기서 분모는 문항 1의 결과에 의해 0.19이고 분자는

$$P(0 \le X \le 1) = P(\frac{0-1}{4} \le \frac{X-1}{4} \le \frac{1-1}{4})$$
$$= P(-0.25 \le Z \le 0) = P(0 \le Z \le 0.25) = 0.10$$

이다. 그러므로 구하고자 하는 조건부확률은 $\frac{10}{19}$이다.

※ 위 풀이 과정의 모든 수식에서 등호를 제외하여도 무방함.

【문제 3-3】

임의추출된 n명의 학생들로부터의 표본평균이 $-1 \le \overline{X} \le 1$일 확률을 구하면 다음과 같다. 먼저, $X \sim N(1,16)$이므로 $\overline{X} \sim N(1, \frac{16}{n})$이다. 그러므로, 주어진 표준정규분포표를 이용하면

$$P(-1 \le \overline{X} \le 1) = P(\frac{-1-1}{4/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{X}-1}{4/\sqrt{n}} \le \frac{1-1}{4/\sqrt{n}})$$
$$= P(-\frac{\sqrt{n}}{2} \le Z \le 0) = P(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{2}) \qquad (*)$$

이다. 문항 1의 결과에 의하면 실제 키와 측정된 키의 차이의 확률 $P(-1 \le X \le 1)$은 0.19이므로 위 (*)의 확률은 0.38 이상이어야 하므로 표준정규분포표에 의하면 $\frac{\sqrt{n}}{2} \ge 1.17$을 만족하는 자연수 n들 중 최소를 구하면 된다. 그러므로 $n \ge 5.4756$이므로 최소의 학생 수 n은 6명이다.

※ 위 풀이 과정의 모든 수식에서 등호를 제외하여도 무방함.