2015학년도 논술고사 출제문제 및 풀이
- 자연계열 -

덕성여자대학교 입학관리과

2015학년도 수시모집 논술고사(자연) - 전공1

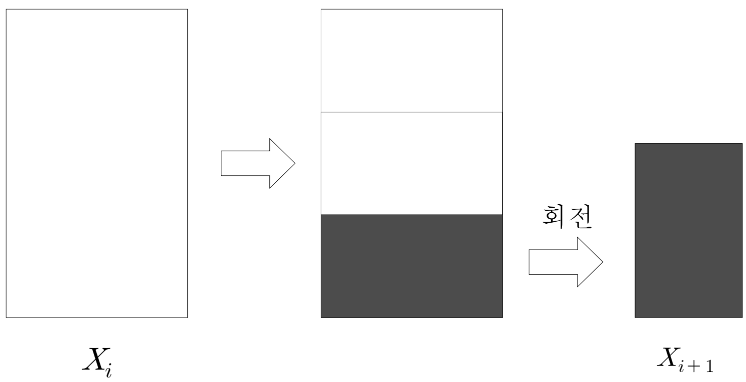
다음의 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.

직사각형 모양의 종이의 규격 $X_0,\ X_1,\ X_2, \ldots$가 다음의 세가지 조건을 만족한다.

(i) X_i의 세로의 길이는 X_i의 가로의 길이보다 길다.

(ii) X_i의 가로와 세로의 길이의 비율은,
X_{i+1}의 가로와 세로의 길이의 비율과 같다.

(iii) X_{i+1}의 세로의 길이는 X_i의 가로의 길이와 같으며,
X_{i+1}의 가로의 길이는 X_i의 세로의 길이의 1/3이다.



문항1)

X_0의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라고 하자. 조건 (ii)에서 $i=0$인 경우, 즉 X_0과 X_1의 관계를 이용하여, b/a의 값을 구하시오. (33.33...%)

문항2)

규격이 각각 $X_0,\ X_1, \ldots, X_n$인 종이들이 한 장씩 있다. 이 종이들의 넓이의 합을 A_n이라 하자. 극한 $\lim_{n\to\infty} A_n$의 값이 존재하는가? 만일 존재한다면 규격 X_0인 종이 한 장의 넓이의 몇 배인지 구하시오. (33.33...%)

문항3)

X_0의 가로의 길이를 1미터라고 하자. 규격 X_n인 종이가 반지름이 10^{-20}미터인 원 안에 들어가도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

(근삿값 $\log_{10}3 \fallingdotseq \dfrac{1}{2.09}$을 사용하시오.) (33.33...%)

【문항1】

<출제의도>

① 문제로부터 비례식을 이끌어낼 수 있는가?

② 비례식으로부터 주어진 값 b/a을 계산할 수 있는가?

<채점기준>

- A: (1),(2)를 모두 얻어내고 조리있게 기술한 경우
  B: (1),(2)를 모두 얻어내었지만 조리있게 기술하지 못한 경우
  C: (1)을 얻어내고 조리있게 기술한 경우
  D: (1)을 얻어내었지만 조리있게 기술하지 못한 경우
  E: 답안 작성을 못한 경우
- (1)은 $\frac{a}{b}=\frac{b/3}{a}$라고 해도 무방하다.

<예시답안>

① 조건 (iii)에 의하여 X_1의 가로의 길이는 $\frac{b}{3}$이고, X_1의 세로의 길이는 a이다. X_0의 가로와 세로의 길이의 비율이 X_1의 가로와 세로의 길이의 비율과 같으므로

$$a : b = \frac{b}{3} : a \quad \text{------------------------(1)}$$

을 만족해야 한다.

② 그러면 $\frac{b^2}{3}=a^2$이므로 $\frac{b^2}{a^2}=3$이다. 따라서

$$b/a = \sqrt{3} \quad \text{------------------------(2)}$$

을 만족해야 한다.

【문항2】

<출제의도>

① 부분합의 극한이 무한급수임을 이해하는가?

② 주어진 수열이 등비수열임을 이해하고 일반항을 구할 수 있는가?

③ 등비수열의 합이 수렴하는 조건은 무엇인가?

④ 등비수열의 합을 계산할 수 있는가?

<채점기준>

- A: (3),(4),(5),(6)을 모두 기술한 경우
  B: (3),(4),(5),(6) 중 세가지를 기술한 경우
  C: (3),(4),(5),(6) 중 두가지를 기술한 경우
  D: (3),(4),(5),(6) 중 한가지를 기술한 경우
  E: (3),(4),(5),(6) 중 한가지도 기술하지 못한 경우

- (4), (6)이 없더라도 대신에 (4‘), (6’)만을 기술해도 인정한다.

<예시답안>

① X_i의 넓이를 c_i라 하자. 그러면,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} c_i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \text{ --------------------(3)}$$

이다.

② 조건 (iii)에 의하여

$$c_i = \frac{c_{i-1}}{3} = \frac{c_{i-2}}{3^2} = \dots = \frac{c_0}{3^i} \text{ -------------------(4‘)}$$

이다. 그러므로 수열 $\{c_i\}$는 공비가 1/3인 등비수열이다. ----------------------(4)

③ 또한 공비 $\frac{1}{3}$이 $-1 < \frac{1}{3} < 1$을 만족하므로 $\lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_0}{3^i}$ 이 수렴한다. -------(5)

④ 무한등비급수의 공식을 이용하면

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_0}{3^i} = \frac{c_0}{1-\frac{1}{3}} = \frac{c_0}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}c_0 \text{ ------------------(6‘)}$$

이다. 결론적으로 $\lim_{n\to\infty} A_n$은 X_0의 넓이의 3/2배가 된다.------------------------(6)

【문항3】

<출제의도>

① 주어진 수열이 등비수열임을 이해하고 일반항을 구할 수 있는가?
② 주어진 조건으로부터 부등식을 이끌어낼 수 있는가?
③ 로그를 이용하여 부등식을 풀 수 있는가?

<채점기준>

- A: (7),(8),(9),(10)을 모두 기술한 경우
  B: (7),(8),(9),(10) 중 세가지를 기술한 경우
  C: (7),(8),(9),(10) 중 두가지를 기술한 경우
  D: (7),(8),(9),(10) 중 한가지를 기술한 경우
  E: (7),(8),(9),(10) 중 한가지도 기술하지 못한 경우
- (7)이 없더라도 대신에 (7‘)만을 기술해도 인정한다.
- (8) 대신에 다른 방법을 이용하여 (8‘)를 얻어내도 무방하다.

<예시답안>

① X_i의 가로의 길이를 a_i라 하자. X_{i+1}와 X_i의 넓이의 비가 $\frac{1}{3}$이므로 길이의 비는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이 된다. 즉,

$$a_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} a_i \text{ --------------------------(7‘)}$$

를 만족한다. 따라서,

$$a_n = \frac{1}{(\sqrt{3})^n} a_0 = \frac{1}{(\sqrt{3})^n} \text{ ----------------------(7)}$$ 이다.

② (문항1)의 결과와 피타고라스의 정리에 의하여 X_i의 대각선의 길이는

$$\sqrt{(a_n)^2 + (\sqrt{3}\, a_n)^2} = 2a_n$$

이다. X_i가 반지름이 10^{-20}인 원 안에 들어가려면

$$2a_n \le 2 \cdot 10^{-20} \text{ ---------------------------(8)}$$을 만족해야 한다.

③ n의 범위를 구하기 위해 계산을 하면,

$$\frac{1}{(\sqrt{3})^n} \le 10^{-20} \qquad \text{------------------------(8‘)}$$즉,

$(\sqrt{3})^n \ge 10^{20}$ 이다. 양변에 $\log_{10}$을 취하면

$$\log_{10}(\sqrt{3})^n \ge \log_{10} 10^{20} \text{ ---------------------(9)}$$

$$즉, \quad \frac{n}{2}\log_{10} 3 \ge 20.$$

그러므로

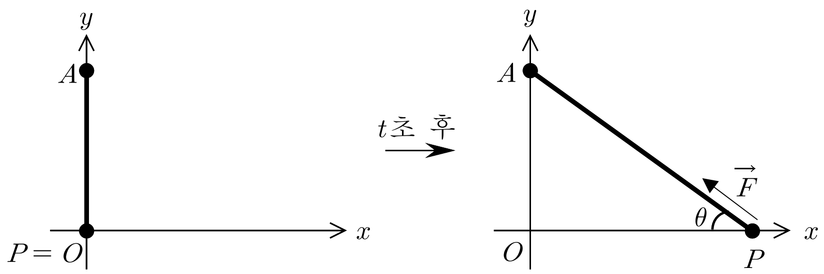
$$n \ge \frac{40}{\log_{10} 3} \fallingdotseq 40 \cdot 2.09 = 83.6. \text{ ----------------------(10)}$$

④ 결론적으로 X_n가 반지름이 10^{-20}미터인 원 안에 들어가는 최소의 정수 n은 84이다.

2015학년도 수시모집 논술고사(자연) - 전공2

다음의 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.

그림에서와 같이 한 끝이 점 $A(0,1)$에 고정되어 있는 고무줄의 다른 끝 P가, 최초의 위치인 원점 O로부터 x축의 양의 방향으로 이동하고 있다. 점 P는 시각이 0초일 때의 위치 O로부터 출발하여 초당 1의 일정한 길이를 움직이는 등속도 운동을 하고, 따라서 시각이 t초일 때 P의 좌표는 $(t,0)$이다. 고무줄은 매순간 휘어지지 않고 항상 선분의 형태를 취한다고 가정한다.



문항1)
시각이 t초인 순간 고무줄의 길이를 $f(t)$라고 할 때, t에 대한 함수 $f(t)$를 구하시오. 시각이 1초일 때 고무줄의 길이의 순간변화율을 구하시오. (33.33...%)

문항2)
각 $\angle OPA$를 θ라고 할 때 $\cos\theta$를 시각 t에 대한 함수로 표현하고, $\int_0^1 \cos\theta \, dt$의 값을 구하시오. (33.33...%)

문항3)
고무줄이 점 P를 당기는 힘 $\overrightarrow{F}=(F_1, F_2)$를 벡터로 보았을 때, 그 크기 $|\overrightarrow{F}|$가

$$|\overrightarrow{F}| = 2\{f(t)-1\}$$

로 주어진다고 하자. 즉, 벡터 $\overrightarrow{F}$의 크기는, 고무줄이 최초의 길이 1에 비해 늘어난 길이인 $f(t)-1$에 비례하고, 이 때 비례상수의 값은 2이다. 벡터 $\overrightarrow{F}$의 x성분 F_1과 y성분 F_2를 각각 시각 t에 대한 함수로 표현하시오. (33.33...%)

[문항1]

<출제의도>

첫 번째 질문은 피타고라스의 정리를 이용할 수 있는가를 확인하고 있다. 두 번째 질문은 순간변화율로서의 미분의 의미를 알고, 더불어 구체적인 함수의 미분을 할 수 있는지를 확인 하고 있다. 두 질문 모두 해당 개념들에 대한 기본적인 학습이 되어 있는지 여부를 묻고 있다. 채점 시 두 개의 질문에 대한 배점은 50:50으로 한다.

<예시답안>

삼각형 $\triangle OAP$가 직각삼각형이고 $\overline{OA}=1$, $\overline{OP}=t$이므로, 피타고라스의 정리를 이용하면 고무줄의 길이는

$$f(t)=\overline{AP}=\sqrt{(\overline{OA})^2+(\overline{OP})^2}=\sqrt{t^2+1}$$

이다.

고무줄의 길이의 순간변화율은

$$f'(t)=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t^2+1}\right)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

이고, 따라서 시각 $t=1$초일 때 고무줄의 길이의 순간변화율은

$$f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

[문항2]

<출제의도>

첫 번째 질문은 삼각함수의 정의를 알고 이를 활용할 수 있는지를 확인하고 있다. 두 번째 질문은 정적분, 특히 간단한 치환적분을 할 수 있는지를 확인하고 있다. 채점 시 두 개의 질문에 대한 배점은 50:50으로 한다.

<예시답안>

$\overline{OP}=t$, $\overline{AP}=\sqrt{t^2+1}$ 이므로, 각 $\theta=\angle OPA$ 의 코사인값은

$$\cos\theta=\frac{\overline{OP}}{\overline{AP}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

이다. 따라서 $u=t^2+1,\ du=2tdt$ 의 치환을 이용하면

$$\int_0^1\cos\theta\, dt=\int_0^1\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{\sqrt{u}}\,du=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_1^2=\sqrt{2}-1.$$

[문항3]

<출제의도>

벡터의 개념과 그 크기, 성분 등에 대한 이해와, 비례관계 등을 이용한 기본적인 평면 기하학에 대한 이해에 대해 확인하고 있다.

<예시답안>

문제1의 결과를 이용하면, 힘 $\overrightarrow{F}=(F_1,F_2)$ 의 크기는

$$|\overrightarrow{F}|=2\{f(t)-1\}=2\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)$$

이고, 그 방향은 벡터 $\overrightarrow{PA}=(0,1)-(t,0)=(-t,1)$ 과 같다. 삼각형의 비례를 이용하면 (그림 참조)

$$|\overrightarrow{F}|:\overline{AP}=|F_1|:\overline{OP}=F_2:\overline{OA},$$

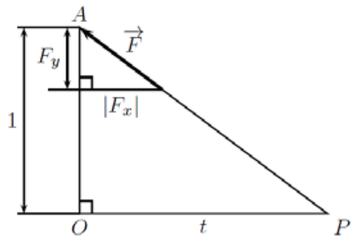
즉

$$2\left(\sqrt{t^2+1}-1\right):\sqrt{t^2+1}=-F_1:t=F_2:1$$

이므로, 벡터 $\overrightarrow{F}$의 x성분 F_1, y성분 F_2는 각각

$$F_1=-\frac{t\cdot 2\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)}{\sqrt{t^2+1}}=-2t+\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}},$$

$$F_2=\frac{1\cdot 2\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)}{\sqrt{t^2+1}}=2-\frac{2}{\sqrt{t^2+1}}.$$



다른 풀이:

벡터 $\overrightarrow{F}=(F_1,F_2)$ 는 크기가 $2\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)$이고 방향이 $\overrightarrow{PA}=(-t,1)$ 의 방향과 같으므로,

$$(F_1,F_2)=2\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\cdot\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}=2\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{(-t)^2+1^2}}(-t,1)$$
$$=\left(-2t+\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}},\ 2-\frac{2}{\sqrt{t^2+1}}\right),$$

즉

$$F_1=-2t+\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}},\qquad F_2=2-\frac{2}{\sqrt{t^2+1}}.$$

2015학년도 수시모집 논술고사(자연) - 전공3

다음의 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.

> 어떤 나라에서는 새 차가 판매된 지 10년이 되면, 고장이 나지 않더라도 환경 문제를 고려하여 폐차를 시킨다고 한다. 이 나라 새 차들의 판매 이후의 수명(단위: 연)을 연속확률변수 X라고 하자. X의 확률밀도함수는 $f(x)=c(1+x)^{-2}$이라고 알려져 있다. 단, c는 상수이다.

문항1)

상수 c를 구하고, 새 차의 판매 이후의 수명이 1년 이상일 확률을 구하시오. (33.33...%)

문항2)

어떤 사람이 새 차를 구입할지, 새 차로 판매된 지 1년 된 중고차를 구입할지를 고민하고 있다. 이 사람은 차량을 구입한 이후의 수명이 1년 이상일 확률이 큰 차량을 선택하고자 한다. 이 사람이 새 차를 구입하는 것이 좋을지, 새 차로 판매된 지 1년 된 중고차를 구입하는 것이 좋을지에 대해 논하시오. (33.33...%)

문항3)

새 차의 판매 이후의 수명이 9년 이상일 확률을 p라고 하자. 어떤 회사가 오늘 10,000대의 새 차를 임의추출하여 구입하였다. 이 차들 중에서 수명이 9년 이상 될 차량의 수를 확률변수 Y라고 하자. Y가 k 이상일 확률이 $2p$ 이상이 되도록 하는 자연수 k의 최댓값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. 단, 계산상의 편의를 위하여 근삿값 $\sqrt{99} \fallingdotseq 10$을 사용하시오. (33.33...%)

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.64	0.45
1.75	0.46
1.88	0.47
2.05	0.48
2.33	0.49

【문항1】

<u>예시 답안</u>

새 차의 판매 이후의 수명의 확률변수 X가 취할 수 있는 값의 범위는 $[0,10]$이고, $\int_0^{10} f(x)dx = 1$이 되어야하므로 $\int_0^{10} c(1+x)^{-2}dx = 1$이 되는 상수 c를 구한다.

$\int_0^{10} c(1+x)^{-2}dx = \int_1^{11} cy^{-2}dy = [-cy^{-1}]_1^{11} = c(1-\frac{1}{11}) = c\times\frac{10}{11} = 1$이므로 $c = \frac{11}{10}$이다. 이 결과를 이용하여 새 차의 판매 이후의 수명이 1년 이상일 확률은 다음과 같다.

$$P(X \geq 1) = \int_1^{10} \frac{11}{10}(1+x)^{-2}dx = \left[-\frac{11}{10}y^{-1}\right]_2^{11} = \frac{11}{10}(\frac{1}{2} - \frac{1}{11}) = \frac{9}{20}.$$

※ $P(X \geq 1) = P(X > 1)$이므로 위 확률계산에서 $P(X \geq 1)$을 $P(X > 1)$로 계산해도 무방함.

<u>출제 의도</u>

1. 연속확률변수의 확률밀도함수에 대한 개념을 이해하는가?
2. 확률밀도함수를 이용하여 원하는 확률을 구할 수 있는가?

<u>채점 기준</u>

A: 모든 질문에 대해 정확히 이해하고 풀었다.

B: 상수 c와 $P(X \geq 1)$ 중 하나는 정확히 풀었고, 다른 하나는 풀이가 틀렸지만 질문의 의미를 알고 있다.

C: 상수 c와 $P(X \geq 1)$ 중 하나는 정확히 풀었고, 다른 하나는 질문의 의미를 파악하지 못 한다.

D: 모든 질문에 대해 그 의미만 아는 정도이다.
  예) 확률변수 X가 취할 수 있는 범위만 안다.
    확률변수 X가 취할 수 있는 범위를 모르고 확률밀도함수 $f(x)$를 적분하였다.

E: 모든 질문에 대해 그 의미를 전혀 모른다.

【문항2】

예시 답안

새 차로 판매된 지 1년 된 중고차를 구입하였을 때, 구입 이후의 수명이 1년 이상일 확률은 다음과 같이 조건부확률로 계산된다.

$$P(X \geq 2 | X \geq 1) = \frac{P(X \geq 2, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)}.$$

여기서 분자의 확률은 $P(X \geq 2) = \frac{11}{10}(\frac{1}{3} - \frac{1}{11}) = \frac{11}{10} \times \frac{11-3}{33} = \frac{8}{30}$이고, 분모의 확률은 (문항 1)의 풀이에 의해 $\frac{9}{20}$이다. 그러므로 $P(X \geq 2 | X \geq 1) = \frac{8/30}{9/20} = \frac{16}{27}$이 된다. 한편, 새 차의 구입 이후의 수명이 1년 이상일 확률은 (문항 1)의 풀이에 의해 $P(X \geq 1) = \frac{9}{20}$이다. 따라서 $P(X \geq 2 | X \geq 1) > P(X \geq 1)$이므로 이 사람의 차량 구입 조건에 의하면, 새 차로 판매된 지 1년 된 중고차를 구입하는 것이 좋다.

※ $P(X \geq 1) = P(X > 1)$이므로 위 확률계산에서 $P(X \geq 1)$을 $P(X > 1)$로 계산해도 무방함.

※ $P(X \geq 2 | X \geq 1) = P(X \geq 2 | X > 1) = P(X > 2 | X \geq 1) = P(X > 2 | X > 1)$이므로
$P(X \geq 2 | X \geq 1)$을 $P(X \geq 2 | X > 1)$, $P(X > 2 | X \geq 1)$혹은 $P(X > 2 | X > 1)$로 계산해도 무방함.

출제 의도

1. 조건부확률의 개념을 이해하는가?

채점 기준

A: 질문에 대해 정확히 이해하고 풀었다.
B: 조건부확률 $P(X \geq 2 | X \geq 1)$를 구하였지만, $P(X \geq 1)$와 비교를 하지 못 하였다.
C: $P(X \geq 1)$의 확률만 이해하여 구하였다.
D: 모든 질문에 대해 그 의미만 아는 정도이다.
E: 모든 질문에 대해 그 의미를 전혀 모른다.

【문항3】

예시 답안

새 차의 판매 이후의 수명이 9년 이상일 확률 p는 위 문항들의 정적분의 방법에 의하면 다음과 같다.

$$p = P(X \geq 9) = \frac{11}{10}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) = \frac{11}{10} \times \frac{11-10}{110} = \frac{1}{100} = 0.01.$$

임의추출되어 구입된 10,000대의 새 차들 중, 수명이 9년 이상될 차량의 수에 대한 확률변수 Y의 확률질량함수는 이항분포로 $Y \sim B(10000, 0.01)$이다. 확률변수 Y의 평균과 분산을 각각 구해보면

$$E(Y) = 10000 \times 0.01 = 100, \quad V(Y) = 10000 \times 0.01 \times 0.99 = 99$$

가 된다. 따라서, 임의추출되어 구입된 10,000대의 새 차들 중, 수명이 9년 이상 될 차량의 수가 k대 이상일 확률이 확률 $p = 0.01$의 2배 이상이 된다면 다음을 만족한다.

$$P(Y \geq k) = P\left(\frac{Y-100}{\sqrt{99}} \geq \frac{k-100}{\sqrt{99}}\right) \geq 0.02.$$

그러므로 표준정규분포표를 이용하면 $\frac{k-100}{\sqrt{99}} \fallingdotseq \frac{k-100}{10} \leq 2.05$가 된다. 따라서 $k \leq 120.5$이므로 자연수인 k의 최댓값은 120이다.

출제 의도

1. 이항분포를 이해하는가?
2. 이항분포가 근사적으로 표준정규분포를 따르는 것을 알고 있는가?
3. 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

채점 기준

A: 질문에 대해 정확히 이해하고 풀었다.

B: 확률변수 Y가 이항분포를 따른다는 것을 알고 있고, 표준정규분포표를 이용하여 계산하였으나 k의 최댓값은 구하지 못하였다.

C: 확률변수 Y가 이항확률분포를 따른다는 것을 알고 있지만, 표준정규분포표를 이용하여 계산하지 못 하였다.

D: 모든 질문에 대해 그 의미만 아는 정도이다.

E: 모든 질문에 대해 그 의미를 전혀 모른다.