

[문항카드 11]

1. 일반정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2 / 수학 2-1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	순열, 조합, 이항분포, 정규분포
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

가) (1) 서로 다른 n 개에서 r ($0 < r \leq n$)개를 택하는 순열의 수는

$${}_n P_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$$

이다.

(2) 서로 다른 n 개에서 r ($0 \leq r \leq n$)개를 택하는 조합의 수는

$${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

이다. (단, ${}_n C_0 = 1$ 이다.)

(3) 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_n H_r = {}_{n+r-1} C_r$$

(나) 한 번의 시행에서 사건 A 가 일어날 확률이 p 로 일정할 때, n 번의 독립시행에서 사건 A 가 일어나는 횟수를 X 라 하자.

(1) 확률변수 X 가 갖는 값은 $0, 1, 2, \dots, n$ 이고, X 의 확률질량함수는 독립시행의 확률에 의하여

$$P(X=x) = {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, n)$$

이며, 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따른다고 한다.

(2) 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따를 때

$$E(X) = np, V(X) = npq, \sigma(X) = \sqrt{npq} \quad (\text{단, } q=1-p)$$

이다.

(다) 평균이 0이고 분산이 1인 정규분포 $N(0, 1)$ 을 표준정규분포라고 한다. 확률변수 Z 가 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다고 할 때, 양수 z 에 대하여 확률 $P(0 \leq Z \leq z)$ 는 다음과 같은 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

[문항]

【1-1】 학생 A가 수영 강습을 받기 위해, 다음 조건

$$m_2 - m_1 \geq 3, m_3 - m_2 \geq 3$$

을 만족시키도록 2019년도의 열두 달 중 세 달 m_1 월, m_2 월, m_3 월을 선택할 수 있는 모든 순서쌍 (m_1, m_2, m_3) 의 개수를 구하시오. (30점)

【1-2】 여덟 개의 면 중 k 개의 면에는 빨간색이 각각 칠해져 있고, 나머지 면에는 파란색이 각각 칠해져 있는 정팔면체 모양의 물체가 있다. 이 물체를 n 번 던져서 지면에 닿은 면이 빨간색이 되는 횟수를 X 라 하자. 확률 변수 X 가 다음의 조건을 만족시킬 때, k 와 n 의 값을 구하시오.(단, 각각의 면에는 한 가지 색만 칠해져 있다.) (30점)

(a) $E(X) = 4V(X)$

(b) $P(X=1) = 30P(X=0)$

【1-3】 확률변수 X 가 정규분포 $N\left(m, \frac{4}{(2m+1)^2}\right)$ 를 따른다고 한다. $P(X \leq 4) = 0.9772$ 일 때, 양수 m 의 값을 구하시오. (20점)

3. 출제 의도

본 문제는 순열과 조합을 활용하여 경우의 수를 구하고, 확률을 구하고, 확률분포를 이해하고 있는지를 평가하고자 한다.

- 1-1 순열, 조합 그리고 중복조합의 뜻을 이해하고 이를 이용하여 주어진 상황에 대한 경우의 수를 구할 수 있다.
- 1-2 이항분포의 뜻과 그 확률질량함수를 이해하고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
- 1-3 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	<p>[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ㉠순열과 조합</p> <p>1. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.</p> <p>2. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.</p> <p>3. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.</p>

문항 및 제시문		관련 성취기준
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ㉑경우의 수, ㉒순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 확통1124. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
제시문2	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ㉑확률분포 1. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (다) 통계 - ㉑확률분포 확통1313. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
제시문3	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ㉑확률분포 1. 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (다) 통계 - ㉑확률분포 1341-2. 표준정규분포와 표준화의 뜻을 알고, 표준정규분포를 활용하여 정규분포의 확률을 구할 수 있다.
문항1-1	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ㉒순열과 조합 1. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 2. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 4. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ㉑경우의 수, ㉒순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 확통1124. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
문항1-2	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ㉑확률분포 1. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (다) 통계 - ㉑확률분포 확통1313. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
문항1-3	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ㉑확률분포 1. 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
	성취기준· 성취수준	[확률과 통계] - (다) 통계 - ㉑확률분포 1341-2. 표준정규분포와 표준화의 뜻을 알고, 표준정규분포를 활용하여 정규분포의 확률을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	우정호 외 24명	동아출판	2014	10-67 160-179
	확률과 통계	김원경 외 11명	비상교육	2014	11-35 109-121
	확률과 통계	류희찬 외 17명	천재교과서	2014	12-41 131-147
	확률과 통계	황선옥 외 10명	좋은책 신사고	2014	12-37 107-121

5. 문항 해설

1-1 문항은 중복조합을 이해하고 이를 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는지 알아보는 문제이다.

1-2 문항은 이항분포에 대한 확률질량함수의 특징을 이해하고 이를 통해 평균과 표준편차를 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.

1-3 정규분포의 뜻을 알고 그 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	1. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, x_1, x_4 \geq 0, x_2, x_3 \geq 2$ 의 관계식을 구하면 10점 2. $x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 5, x_1, y_2, y_3, x_4 \geq 0$ 의 관계식을 구하면 10점 3. 관계식과 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하면 10점 중복조합을 이용하지 않고 직접 경우의 수를 구하면 30점	30
1-2	1. 조건 (a)를 이용하여 $p = \frac{3}{4}$ 을 구하면 10점 2. $p = \frac{3}{4}$ 을 이용하여 $k = 6$ 을 구하면 10점 3. $p = \frac{3}{4}$ 과 조건 (b)를 이용하여 $n = 10$ 을 구하면 10점	30
1-3	1. 표준화하여 확률 $P(X \leq 4) = P\left(Z \leq \frac{4-m}{\frac{2}{2m+1}}\right)$ 을 구하면 5점 2. 관계식 $\frac{1}{2}(2m+1)(4-m) = -m^2 + \frac{7}{2}m + 2 = 2$ 를 구하면 5점 2. $m^2 - \frac{7}{2}m = m\left(m - \frac{7}{2}\right) = 0$ 으로부터 양수 $m = \frac{7}{2}$ 를 구하면 10점	20

7. 예시 답안

[1-1]

주어진 조건은 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 2$, $x_4 \geq 0$ 를 만족한다. 여기에서 x_1 은 m_1 월 이전에 달 수, x_2 는 m_1 월과 m_2 월 사이의 달 수, x_3 는 m_2 월과 m_3 월 사이의 달수, 그리고 x_4 는 m_3 이후의 남은 달 수이다. 따라서 $y_2 = x_2 - 2 \geq 0$, $y_3 = x_3 - 2 \geq 0$ 이라 하면

$$x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 5, \quad x_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

을 만족하는 경우의 수는

$${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$$

이다.

[1-2]

확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르므로 $E(X) = np$ 이고 $V(X) = np(1-p)$ 이다. 조건 (a)로부터

$np = 4np(1-p)$ 이므로 $p = \frac{3}{4} = \frac{k}{8}$ 이고 조건 (b)로부터 $P(X=1) = 30P(X=0)$ 이므로

${}_nC_1 p^1 (1-p)^{n-1} = 30 {}_nC_0 (1-p)^n$ 으로부터 $np = 30(1-p)$ 이다. 따라서 $k=6$ 이고 $n=10$ 이다.

[1-3]

확률변수 X 가 정규분포 $N\left(m, \frac{4}{(2m+1)^2}\right)$ 를 따르므로

$$P(X \leq 4) = P\left(Z \leq \frac{4-m}{\frac{2}{2m+1}}\right) = P\left(Z \leq \frac{1}{2}(2m+1)(4-m)\right) \text{이다.}$$

표준정규분포표로부터 $P(Z \leq 2) = 0.9772$ 이므로 $\frac{1}{2}(2m+1)(4-m) = 2$ 이다. 따라서 $m = \frac{7}{2}$ 이다.

[문항카드 12]

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열 II 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 I, 미적분 II, 기하와 벡터
	핵심 개념 및 용어	선분의 내분점과 외분점, 공간벡터의 내적, 직선의 방정식, 함수의 극한, 함수의 몫의 미분법
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 두 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 에 대하여 선분 AB 를

(1) $m : n$ ($m > 0, n > 0$) 으로 내분하는 점 P 의 좌표는

$$P \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n} \right)$$

(2) $m : n$ ($m > 0, n > 0, m \neq n$) 으로 외분하는 점 Q 의 좌표는

$$Q \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n} \right)$$

(나) 두 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

이다. (단, $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ 이다.)

(다) 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터가 각각 \vec{d}_1, \vec{d}_2 일 때, 두 직선 l_1, l_2 가 서로 수직이면 $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0$ 이다.

좌표공간에 네 점 $A(1, 2, 4), B(4, 1, 9), C(-3, 5, -7), D(a, b, c)$ 가 있다. 두 직선 AB 와 CD 가 서로 수직이고 점 D 는 직선 AB 위에 있다. 선분 AB 를 $m : 1$ 로 내분하는 점을 P, $m^2 : 1$ 로 외분하는 점을 Q 라 하자. (단, a, b, c 는 실수이고 $m > 2$ 이다.)

【2-1】 $a+b+c$ 의 값을 구하시오. (10점)

【2-2】 $m=3$ 일 때, 점 P와 Q의 좌표를 구하시오. (10점)

【2-3】 선분 PQ의 중점을 M이라 할 때, 다음은 벡터 \overrightarrow{CM} 의 크기의 최솟값을 구하는 과정이다.

주어진 조건으로부터 점 M은 선분 DB를 $1 : \boxed{\text{①}}$ 로 내분하는 점이다. 그런데 세 점 B, D, M은 한 직선 위에 있으므로 두 벡터 \overrightarrow{DM} 과 \overrightarrow{DB} 는 서로 평행하다. 그러므로

$$\overrightarrow{DM} = \boxed{\text{②}} \overrightarrow{DB}$$

이다. 한편 $|\overrightarrow{CM}|^2 = |\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM}|^2$ 이고

\vdots
 (중략)
 \vdots

따라서 벡터 \overrightarrow{CM} 의 크기의 최솟값은 $\boxed{\text{③}}$ 이다.

①, ②, ③에 들어갈 m 에 대한 식 또는 수를 각각 $f(m)$, $g(m)$, α 라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\lim_{m \rightarrow \infty} mf(m)$ 을 구하시오. (20점)

(2) $g(m)$ 이 최소가 되는 m 의 값을 구하시오. (30점)

(3) $\alpha^2 = \frac{p+q\sqrt{3}}{16}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 정수이다.) (20점)

3. 출제 의도

자연과학, 공학 등에서 공간도형 및 공간벡터를 이해하는 것은 매우 중요하다. 본 문제에서는 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점, 직선의 방정식, 공간벡터의 연산과 내적을 학생들이 이해하고 있는지를 평가하였다. 또한 함수의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가하였고, 미분법을 활용하여 함수의 최솟값을 계산할 수 있는지를 평가하였다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 2. 공간좌표 - 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	기백1323. 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 3. 공간벡터 - 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	기백1333. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (다)	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 3. 공간벡터 - 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	기백1332. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
2-1	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 3. 공간벡터 - 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	기백1333. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
2-2	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 2. 공간좌표 - 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	기백1323. 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
2-3(1)	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 2. 공간좌표 - 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다. [미적분 I] II. 함수의 극한과 연속, 1. 함수의 극한 - 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	기백1323. 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다. 미적1212. 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.
2-3(2)	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 3. 공간벡터 - 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [미적분 II] III. 미분법, 1. 여러 가지 함수의 미분법, 2. 도함수의 활용 - 함수의 몫을 미분할 수 있다. - 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준· 성취수준	기백1331. 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. 미적2311. 함수의 몫을 미분할 수 있다. 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
2-3(3)	교육과정	[기하와 벡터] III. 공간도형과 공간벡터, 3. 공간벡터 - 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	기백1332. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	정상권 외 7명	(주) 금성출판사	2018	150-152 164-170 172-175
	기하와 벡터	김창동 외 14명	(주) 교학사	2016	150-153 161-181
	미적분 I	황선욱 외 10명	좋은책 신사고	2016	60-63
	미적분 I	김창동 외 14명	(주) 교학사	2018	59-66
	미적분 II	정상권 외 7명	(주) 금성출판사	2018	110-113 132-137
	미적분 II	김창동 외 14명	(주) 교학사	2016	111-115 133-142

5. 문항 해설

[2-1] 좌표공간에서 직선의 방정식과 두 직선의 수직 조건을 이해하는지를 평가한다. (자세한 풀이 과정은 7. 예시답안 참조)

[2-2] 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점을 이해하고 계산할 수 있는지를 평가한다. (자세한 풀이 과정은 7. 예시답안 참조)

[2-3] (1) 좌표공간에서 선분의 내분점이 주어졌을 때 내분 비율을 계산할 수 있는지를 평가하고 함수의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가한다. (자세한 풀이 과정은 7. 예시답안 참조)

[2-3] (2) 두 공간벡터의 평행 조건을 이해하였는지를 평가한다. 또한 미분을 활용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다. (자세한 풀이 과정은 7. 예시답안 참조)

[2-3] (3) 공간벡터의 내적에 대한 성질을 이용하여 공간벡터의 크기를 계산할 수 있는지를 평가한다. (자세한 풀이 과정은 7. 예시답안 참조)

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$a = -5$ 를 구한 경우	3점
	$b = 4$ 를 구한 경우	3점
	$c = -6$ 을 구한 경우	3점
	$a + b + c = -7$ 을 구한 경우	1점
2-2	$P\left(\frac{13}{4}, \frac{5}{4}, \frac{31}{4}\right)$ 을 구한 경우	5점
	$Q\left(\frac{35}{8}, \frac{7}{8}, \frac{77}{8}\right)$ 을 구한 경우	5점
2-3 (1)	$f(m) = \frac{m-2}{6m^2-m-4}$ 또는 $f(m)$ 에 대한 관계식을 구한 경우	10점
	$\lim_{m \rightarrow \infty} mf(m) = \frac{1}{6}$ 을 구한 경우	10점
2-3 (2)	$g(m) = \frac{6m^2-m-4}{6m^2-6}$ 또는 $g(m)$ 에 대한 관계식을 구한 경우	10점
	$m = 2 + \sqrt{3}$ 을 구한 경우	20점
2-3 (3)	$p = 3701$ 을 구한 경우	9점
	$q = 700$ 을 구한 경우	9점
	$p + q = 4401$ 을 구한 경우	2점

7. 예시 답안

【2-1】 (10점)

○ 주어진 조건으로부터 직선 AB 의 방정식은

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{5}$$

이므로 D 의 좌표는 $(a, b, c) = (3t+1, -t+2, 5t+4)$ 와 같이 표현할 수 있다. 직선 CD 의 방향 벡터는 $(3t+4, -t-3, 5t+11)$ 이고 두 직선 AB 와 CD 가 서로 수직이므로

$$(3t+4, -t-3, 5t+11) \cdot (3, -1, 5) = 0$$

이다. 그러므로 $t = -2$ 이고 $(a, b, c) = (-5, 4, -6)$ 이다. 따라서 $a + b + c = -7$ 이다.

【2-2】 (10점)

○ 주어진 조건으로부터

$$P\left(\frac{4m+1}{m+1}, \frac{m+2}{m+1}, \frac{9m+4}{m+1}\right), Q\left(\frac{4m^2-1}{m^2-1}, \frac{m^2-2}{m^2-1}, \frac{9m^2-4}{m^2-1}\right)$$

이다. 따라서 $m=3$ 일 때, $P\left(\frac{13}{4}, \frac{5}{4}, \frac{31}{4}\right), Q\left(\frac{35}{8}, \frac{7}{8}, \frac{77}{8}\right)$ 이다.

【2-3】 (20+30+20=70점)

(1) (20점) ○ 선분 PQ의 중점 M의 좌표는 $M\left(4 + \frac{-3m+6}{2m^2-2}, 1 + \frac{m-2}{2m^2-2}, 9 + \frac{-5m+10}{2m^2-2}\right)$ 이고

【2-1】의 풀이로부터 $D(-5, 4, -6)$ 이다. M은 선분 DB를 $1 : f(m)$ 으로 내분하는 점이므로

$$\frac{4-5f(m)}{1+f(m)} = 4 + \frac{-3m+6}{2m^2-2}$$

이다. 그러므로 $f(m) = \frac{m-2}{6m^2-m-4}$ 이다. 따라서 $\lim_{m \rightarrow \infty} mf(m) = \frac{1}{6}$ 이다.

(2) (30점) ○ 세 점 B, D, M은 한 직선 위에 있으므로 두 벡터 \overrightarrow{DM} 과 \overrightarrow{DB} 는 서로 평행하다. (1)로부터

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{1+f(m)} \overrightarrow{DB} = \frac{6m^2-m-4}{6m^2-6} \overrightarrow{DB}$$

이므로 $g(m) = \frac{6m^2-m-4}{6m^2-6}$ 이다. $g(m)$ 의 도함수의 부호를 조사하면 함수 $g(m)$ 은 $m = 2 + \sqrt{3}$ 일 때 최소가 됨을 알 수 있다.

(3) (20점) ○ 조건으로부터 $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{6}$ 이고 $|\overrightarrow{DB}| = 3\sqrt{35}$ 이다. $\overrightarrow{DM} = g(m)\overrightarrow{DB}$ 이고 두 벡터 \overrightarrow{CD} 와 \overrightarrow{DM} 은 서로 수직이므로

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CM}|^2 &= |\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM}|^2 \\ &= |\overrightarrow{CD}|^2 + \{g(m)\}^2 |\overrightarrow{DB}|^2 \\ &= 6 + 315 \{g(m)\}^2 \end{aligned}$$

이다. $g(m)$ 의 최솟값은 $g(2 + \sqrt{3}) = \frac{10 + \sqrt{3}}{12}$ 이므로 $|\overrightarrow{CM}|^2$ 의 최솟값은

$$\alpha^2 = \frac{3701 + 700\sqrt{3}}{16}$$

이다. 따라서 $p = 3701, q = 700$ 이고 $p + q = 4401$ 이다.

[문항카드 13]

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열2 / 수학 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 I, 미적분 II
	핵심 개념 및 용어	함수의 극대와 극소, 부정적분, 부분적분, 적분과 넓이, 접선의 방정식, 삼각함수 덧셈 정리
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$ 가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

이다.

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때, $y = f^{-1}(x)$ 의 도함수는

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \quad (\text{단, } f'(y) \neq 0)$$

이다.

(다) 삼각함수의 덧셈정리

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

[문항]

함수 $f(x) = (ax^2 + bx)e^x$ 에 대하여 구간 $[0, \infty)$ 에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x \{f(t) - f^{-1}(t)\} dt$$

는 $x = 1$ 에서 극솟값 $-\frac{1}{3}$ 을 갖는다. (단, a, b 는 양수이고, $f^{-1}(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.)

【3-1】 $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하시오. (30점)

【3-2】 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선을 l_1 , 곡선 $y = f^{-1}(x)$ 위의 점 $(1, f^{-1}(1))$ 에서의 접선을 l_2 라 하자. 직선 l_1 과 직선 l_2 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan \theta$ 의 값을 구하시오. (20점)

【3-3】 $f(\alpha) - g(\alpha) = 4$ 를 만족시키는 양의 실수 α 에 대하여 $2\alpha e^{\alpha-1} + 3 \int_1^{\alpha} f^{-1}(x) dx$ 의 값을 구하시오. (30점)

3. 출제 의도

본 문제는 함수와 역함수의 부정적분에 대한 성질과 미적분의 기본정리 및 적분을 이용하여 주어진 함수를 구할 수 있는지를 평가한다. 또 함수와 역함수의 미분에 대한 관계를 이용하여 두 접선이 이루는 각에 대한 탄젠트 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[3-1] 주어진 함수의 부정적분에 미적분의 기본정리와 미분을 적용하여 주어진 함수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[3-2] 미분을 이용하여 함수의 접선의 기울기와 역함수의 미분법을 이용하여 역함수의 접선의 기울기를 구한 후, 두 접선이 이루는 각에 대한 탄젠트 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[3-3] 함수와 역함수의 부정적분에 대한 조건으로부터 주어진 적분값을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 ② 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 미적2412. 부분적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[미적분 II] - 다. 미분법 ①여러 가지 미분법 ③ 역함수를 미분할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[미적분 II] - 다. 미분법 ①여러 가지 미분법 미적2313. 역함수를 미분할 수 있다.
제시문 (다)	교육과정	[미적분 II] - 나. 삼각함수 ②삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
	성취기준· 성취수준	[미적분 II] - 나. 삼각함수 ②삼각함수의 미분 미적2221-2. 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
문항3-1	교육과정	[미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [미적분 II] - 다. 다항함수의 미분법 ②도함수의 활용 ② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 ② 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분 II] - 라. 적분법 ②정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준·성 취수준	[미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 미적2413-3. 지수함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다 [미적분 II] - 다. 미분법 ②도함수의 활용 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다 [미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 미적2412. 부분적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있다 [미적분 II] - 라. 적분법 ②정적분의 활용 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다
문항3-2	교육과정	[미적분 II] - 다. 미분법 ②도함수의 활용 ① 접선의 방정식을 구할 수 있다. [미적분 II] - 다. 미분법 ①여러 가지 미분법 ③ 역함수를 미분할 수 있다. [미적분 II] - 나. 삼각함수 ②삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
	성취기준· 성취수준	[미적분 II] - 다. 미분법 ②도함수의 활용 미적2321. 접선의 방정식을 구할 수 있다. [미적분 II] - 다. 미분법 ①여러 가지 미분법 미적2313. 역함수를 미분할 수 있다. [미적분 II] - 나. 삼각함수 ②삼각함수의 미분 미적2221-2. 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
문항3-3	교육과정	[미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[미적분 II] - 라. 적분법 ①여러 가지 적분법 미적2413-3. 지수함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2018	75-78, 113-120, 145-152, 157-159
	미적분 II	우정호 외	동아출판	2018	96-99, 150-159, 211-213, 220-223

5. 문항 해설

[3-1] 조건으로부터 $f(1) = 1$ 을 구하고, 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 성질을 이용하여 $\int_0^1 f(x)dx$ 의 값을 구한 후, 부분적분법을 이용하여 함수 $f(x)$ 을 구한다.

[3-2] 미분계수를 이용하여 함수의 그래프의 위의 점에서 접선의 기울기를 구하고, 역함수의 미분법을 이용하여 역함수의 그래프의 위의 점에서 접선의 기울기를 구한 후, 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 각에 대한 탄젠트 값을 구한다.

[3-3] 함수의 증가와 감소를 이용하여 $f(\alpha) - g(\alpha) = 4$ 로부터 $\alpha > 1$ 을 추론하고, 문제의 조건으로부터 $\int_1^\alpha f^{-1}(x)dx$ 와 $g(\alpha)$ 의 관계를 찾아 문제를 해결한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	$f(1) = 1$ 또는 $(a+b)e = 1$ 을 구한다.	5
	$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$ 을 구한다.	10
	관계식 $ae + b - 2a = \frac{1}{3}$ 을 구한다.	10
	$a = \frac{1}{3e}$, $b = \frac{2}{3e}$ 또는 $\frac{b}{a} = 2$ 를 구한다.	5
3-2	접선 l_1 의 기울기를 구한다.	5
	직선 l_2 의 기울기를 구한다.	5
	$\tan\theta$ 의 값을 구한다.	10

3-3	$\int_1^\alpha f^{-1}(x)dx$ 과 $g(\alpha)$ 의 관계를 구한다.	15
	정답 10을 구한다.	15

7. 예시 답안

【3-1】

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로

$$g'(1) = f(1) - f^{-1}(1) = 0 \quad \text{즉, } f(1) = 1$$

이다. 그러므로

$$(a+b)e = 1$$

이다. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 $f(0)=0$, $f(1)=1$ 이므로 정적분과 넓이의 관계에 의하여

$$\int_0^1 \{f(x) + f^{-1}(x)\} dx = 1$$

이다. 또 조건으로부터 $g(1) = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$g(1) = \int_0^1 \{f(x) - f^{-1}(x)\} dx = -\frac{1}{3}$$

이다. 따라서 $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$ 이다. 한편 부분적분법을 이용하면

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx)e^x dx = ae + b - 2a$$

이므로

$$ae + b - 2a = \frac{1}{3}$$

이다. 그러므로 $a = \frac{1}{3e}$, $b = \frac{2}{3e}$ 이다. 따라서 $\frac{b}{a} = 2$ 이다.

【3-2】

함수 $f(x) = \frac{1}{3e}(x^2 + 2x)e^x$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선 l_1 의 기울기는 $f'(1) = \frac{7}{3}$ 이다.

다. 또 역함수의 미분법에 의하여 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(1, f^{-1}(1))$ 에서의 접선 l_2 의 기울기는 $\frac{3}{7}$ 이다. 직

선 l_1 의 기울기를 $\tan\theta_1$, 직선 l_2 의 기울기를 $\tan\theta_2$ 라 하면 $\tan\theta_1 = \frac{7}{3}$, $\tan\theta_2 = \frac{3}{7}$ 이고 $\theta = \theta_1 - \theta_2$ 이므로

$$\tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{20}{21}$$

이다.

【3-3】

함수 $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면 $h(x)$ 는 증가함수이고 $h(1) = \frac{4}{3}$ 이므로 $f(\alpha) - g(\alpha) = 4$ 인 α 는 $\alpha > 1$ 이다.

한편 문제의 조건으로부터

$$4 = f(\alpha) - g(\alpha) = f(\alpha) - g(1) - \int_1^\alpha f(x)dx + \int_1^\alpha f^{-1}(x)dx$$

이므로

$$\int_1^\alpha f^{-1}(x)dx = \frac{10}{3} - f(\alpha) + \frac{1}{3e}\alpha^2 e^\alpha$$

이다. 그러므로

$$2\alpha e^{\alpha-1} + 3 \int_1^\alpha f^{-1}(x)dx = 10$$

이다.

[문항카드 14]

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열2 / 수학 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 II, 기하와 벡터
	핵심 개념 및 용어	이차곡선, 포물선, 쌍곡선, 초점, 삼각함수
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 초점이 $F(0, p)$ 이고 준선이 $y = -p$ 인 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4py \quad (\text{단, } p \neq 0)$$

이다.

(나) 두 초점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ 로부터의 거리의 차가 $2b$ 인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } c > b > 0, a^2 = c^2 - b^2)$$

이고 점근선의 방정식은

$$y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$$

이다.

(다) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여 선분 AB 의 길이 \overline{AB} 는

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

이다.

[문항]

포물선

$$C_1 : x^2 = ay - 3$$

에 초점의 좌표가 $F(0, c)$ 와 $F'(0, -c)$ 인 쌍곡선

$$C_2 : \frac{x^2}{3} - y^2 = -1$$

의 점근선이 접할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, c 는 양수이다.)

【4-1】 $a^2 + c^2$ 의 값을 구하시오. (15점)

【4-2】 포물선 C_1 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 P 에 대하여 직선 $F'P$ 와 쌍곡선 C_2 의 교점 중 제1사분면 위의 점을 Q 라 하자.

(1) 두 점 P, Q 에서 y 축에 내린 수선의 발을 각각 R, S 라 하자. 두 등식

$$|\overline{FP} + \textcircled{1}| = \textcircled{2} \overline{FR}$$

$$\overline{F'S} + \textcircled{3} \overline{FQ} = \textcircled{4}$$

가 항상 성립하도록 하는 ①, ②, ③, ④ 에 알맞은 수를 각각 p, q, r, s 라 할 때, $p \times q \times r \times s$ 의 값을 구하시오. (25점)

(2) 직선 $F'P$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, 선분 FQ 의 길이는

$$\overline{FQ} = \alpha + \frac{3}{2 \sin \theta + \beta}$$

이다. 상수 α, β 의 값을 구하시오. (30점)

(3) 직선 $F'P$ 와 쌍곡선 C_2 의 교점 중 제4사분면 위의 점을 Q' 이라 하자. 선분 FQ 의 길이가 최대가 될 때,

$$\frac{\overline{PQ'}}{\overline{PQ}} = \frac{n}{m} + \frac{2}{3} \sqrt{10}$$

이다. 서로소인 자연수 m, n 의 값을 구하시오. (30점)

3. 출제 의도

본 문제는 이차곡선의 기하적 특징들을 평면좌표계를 활용하여 알아낼 수 있는지 평가 하고자 한다. 문제의 조건으로부터 포물선과 쌍곡선의 위치관계를 파악하고 포물선과 쌍곡선의 기하적 정의로부터 선분들 사이의 관계식을 유도할 수 있는지 평가한다. 그리고, 선분의 길이를 각에 대한 함수로 표현하여 그것이 최대가 될 조건을 찾을 수 있는지 평가한다.

[4-1] 제시문과 문제의 조건을 활용하여 포물선의 방정식을 구하고 쌍곡선의 초점을 찾을 수 있는지 평가한다.

[4-2] 포물선과 쌍곡선의 정의를 활용하여 곡선의 교점들이 이루는 선분 사이의 관계식을 유도할 수 있는지 평가한다. 이를 활용하여 선분의 길이를 각에 대한 함수로 표현하고 선분의 길이가 최대가 될 조건을 파악할 수 있는지 평가한다. 이로부터 포물선과 쌍곡선 위의 점으로 이루어진 선분의 비율을 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 ① 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[기하와 벡터]- 나. 평면곡선 1) 이차곡선 기백1111. 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 ③ 쌍곡선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[기하와 벡터]- 나. 평면곡선 1) 이차곡선 기백1113. 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (다)	교육과정	[수학I] - 나. 도형의 방정식 2) 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[수학I] - 나. 도형의 방정식 2) 평면좌표 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
문항4-1	교육과정	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 ① 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. ③ 쌍곡선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 기백1111. 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. 기백1113. 쌍곡선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
문항4-2	교육과정	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 ① 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. ③ 쌍곡선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
		[수학I] - 나. 도형의 방정식 2) 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [미적분II] 나. 삼각함수 1) 삼각함수의 뜻과 그래프 ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

성취기준· 성취수준	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 기백1111. 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. 기백1113. 쌍곡선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
	[수학I] - 나. 도형의 방정식 2) 평면좌표 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [미적분II] 나. 삼각함수 1) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2212-1. 삼각함수의 뜻을 알고, 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있다. 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	11-30
	기하와 벡터	우정호 외	동아출판	2018	15-45
	미적분 II	김창동 외	교학사	2016	60-74
	미적분 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	57-67

5. 문항 해설

【4-1】 문제의 조건으로부터 포물선의 방정식과 쌍곡선의 초점을 찾을 수 있는지 평가하는 문항이다.

【4-2】 이차곡선의 정의와 피타고라스 정리로부터 이차 곡선과 직선의 교점으로 이루어진 선분들 사이의 관계식을 유도할 수 있는지 평가하는 문항이다. 이로부터 특정 선분의 길이를 각에 관한 함수로 표현하고 최대가 될 때의 선분 사이의 비율을 찾을 수 있는지 묻는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4-1	a 의 값을 구한다.	5
	c 의 값을 구한다.	5
	$a^2 + c^2$ 의 값을 구한다.	5
4-2	(1) p 의 값을 구한다.	5

(1) q 의 값을 구한다.	5
(1) r 의 값을 구한다.	5
(1) s 의 값을 구한다.	5
(1) $p \times q \times r \times s$ 의 값을 구한다.	5
(2) α 의 값을 구한다.	15
(2) β 의 값을 구한다.	15
(3) m 의 값을 구한다.	15
(3) n 의 값을 구한다.	15

7. 예시 답안

【4-1】

조건으로부터 쌍곡선의 초점의 좌표는 $(0, 2)$, $(0, -2)$ 이다. 즉, $c = 2$ 이다. 그리고, 점근선 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 이 포물선에 접하므로 y 에 대한 이차 방정식 $(\pm \sqrt{3}y)^2 - ay + 3 = 0$ 은 중근을 갖는다. 그러므로 $a = 6$ 이다. 따라서, $a^2 + c^2 = 40$ 이다.

【4-2】 (1)

포물선 C_2 의 초점은 $F(0, 2)$ 이고 준선의 방정식은 $y = -1$ 이므로 선분 \overline{FP} 의 길이는 점 P 에서 직선 $y = -1$ 까지의 거리와 같다. 그런데, 점 $F(0, 2)$ 에서 $(0, -1)$ 까지의 거리는 3이므로,

$$\overline{FP} - 3 = \pm \overline{FR}$$

쌍곡선의 정의로부터 $\overline{F'Q} = 2 + \overline{FQ}$ 이고 직각삼각형 $\triangle F'SQ$ 와 $\triangle F'SQ$ 에 피타고라스 정리를 적용하면,

$$\overline{F'S} - \frac{1}{2} \times \overline{FQ} = \frac{5}{2}$$

이다. 따라서, $p \times q \times r \times s = \frac{15}{4}$ 이다.

【4-2】 (2)

$\angle SQF' = \theta$ 이고 (1)의 두 번째 등식으로부터, $\sin \theta = \frac{\overline{F'S}}{\overline{F'Q}} = \frac{\overline{FQ} + 5}{2\overline{FQ} + 4}$ 이므로,

$$\overline{FQ} = -2 + \frac{3}{2\sin \theta - 1}$$

이다. 따라서, $\alpha = -2$, $\beta = -1$ 이다.

【4-2】 (3)

(2)의 식으로부터 θ 가 최소가 될 때, 즉, 직선 $F'P$ 가 포물선에 접할 때 \overline{FQ} 가 최대가 된다. 접점의 좌표를 $P(t_0, \frac{t_0^2+3}{6})$ 이라 하면, 접선의 방정식은 $y - \frac{t_0^2+3}{6} = \frac{t_0}{3}(x - t_0)$ 이다. 접선이 점 $F'(0, -2)$ 를 지나므로 접선의 방정식은 $y = \frac{\sqrt{15}}{3}x - 2$ 이다. 접선과 쌍곡선의 교점 Q, Q' 의 y 좌표를 각각 구하면 $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{10}}{2}$ 이다. 점 Q' 에서 y 축에 내린 수선을 받을 S' 이라 할 때,

$$\frac{\overline{PQ'}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{RS'}}{\overline{RS}} = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

이다. 따라서, $m = 3, n = 7$ 이다.