부록 4 문항카드(수리계열 - 수학)

[경북대학교 문항정보: 논술]

[문항카드 7]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열1 / 수학 1-1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	순열, 조합, 이항분포, 정규분포
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

가) (1) 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수는

$${}_n\mathrm{P}_\mathrm{r}=\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\cdots(\mathrm{n}-\mathrm{r}+1)$$

이다.

(2) 서로 다른 n개에서 $r\,(0\le r\le n)$개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{C}_\mathrm{r}=\frac{{}_\mathrm{n}\mathrm{P}_\mathrm{r}}{\mathrm{r}!}=\frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{r}!(\mathrm{n}-\mathrm{r})!}$$

이다. (단, ${}_n\mathrm{C}_0=1$이다.)

(3) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

(나) 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 하자.

(1) 확률변수 X가 갖는 값은 $0,1,2,\cdots,n$이고, X의 확률질량함수는 독립시행의 확률에 의하여

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}\ (x=0,1,2,\cdots,n)$$

이며, 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\,p)$를 따른다고 한다.

(2) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\,p)$를 따를 때

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}\quad(\text{단, } q=1-p)$$

이다.

(다) 평균이 0이고 분산이 1인 정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 표준정규분포라고 한다. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다고 할 때, 양수 z에 대하여 확률 $\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$는 다음과 같은 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

[문항]

【1-1】 학생 A가 수영 강습을 받기 위해, 다음 조건

$$m_2 - m_1 \ge 3,\ m_3 - m_2 \ge 3$$

을 만족시키도록 2019년도의 열두 달 중 세 달 m_1월, m_2월, m_3월을 선택할 수 있는 모든 순서쌍 (m_1, m_2, m_3)의 개수를 구하시오. (30점)

【1-2】 여덟 개의 면 중 k개의 면에는 빨간색이 각각 칠해져 있고, 나머지 면에는 파란색이 각각 칠해져 있는 정팔면체 모양의 물체가 있다. 이 물체를 n번 던져서 지면에 닿은 면이 빨간색이 되는 횟수를 X라 하자. 확률변수 X가 다음의 조건을 만족시킬 때, k와 n의 값을 구하시오. (단, 각각의 면에는 한 가지 색만 칠해져 있다.) (30점)

(a) $\mathrm{E}(X) = 4\mathrm{V}(X)$

(b) $\mathrm{P}(X=1) = 30\mathrm{P}(X=0)$

【1-3】 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{4}{(2m+1)^2}\right)$를 따른다고 한다. $\mathrm{P}(X \le 4) = 0.9772$일 때, 양수 m의 값을 구하시오. (30점)

3. 출제 의도

본 문제는 순열과 조합을 활용하여 경우의 수를 구하고, 확률을 구하고, 확률분포를 이해하고 있는지를 평가하고자 한다.

1-1 순열, 조합 그리고 중복조합의 뜻을 이해하고 이를 이용하여 주어진 상황에 대한 경우의 수를 구할 수 있다.
1-2 이항분포의 뜻과 그 확률질량함수를 이해하고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
1-3 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ②순열과 조합 1. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 2. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 4. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ①경우의 수, ②순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 확통1124. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
제시문2	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 1. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 확통1313. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
제시문3	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 1. 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 1341-2. 표준정규분포와 표준화의 뜻을 알고, 표준정규분포를 활용하여 정규분포의 확률을 구할 수 있다.
문항1-1	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ②순열과 조합 1. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 2. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 4. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ①경우의 수, ②순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 확통1124. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
문항1-2	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 1. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 확통1313. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
문항1-3	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 1. 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (다) 통계 - ①확률분포 1341-2. 표준정규분포와 표준화의 뜻을 알고, 표준정규분포를 활용하여 정규분포의 확률을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	우정호 외 24명	동아출판	2014	10-67 160-179
	확률과 통계	김원경 외 11명	비상교육	2014	11-35 109-121

	확률과 통계	류희찬 외 17명	천재교과서	2014	12-41 131-147
	확률과 통계	황선욱 외 10명	좋은책 신사고	2014	12-37 107-121

5. 문항 해설

1-1 문항은 중복조합을 이해하고 이를 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는지 알아보는 문제이다.
1-2 문항은 이항분포에 대한 확률질량함수의 특징을 이해하고 이를 통해 평균과 표준편차를 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.
1-3 정규분포의 뜻을 알고 그 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	1. $x_1+x_2+x_3+x_4=9$, $x_1, x_4 \geq 0$, $x_2, x_3 \geq 2$의 관계식을 구하면 10점 2. $x_1+y_2+y_3+x_4=5$, $x_1, y_2, y_3, x_4 \geq 0$의 관계식을 구하면 10점 3. 관계식과 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하면 10점 중복조합을 이용하지 않고 직접 경우의 수를 구하면 30점	30
1-2	1. 조건 (a)를 이용하여 $p=\frac{3}{4}$을 구하면 10점 2. $p=\frac{3}{4}$을 이용하여 $k=6$을 구하면 10점 3. $p=\frac{3}{4}$과 조건 (b)를 이용하여 $n=10$을 구하면 10점	30
1-3	1. 표준화하여 확률 $\mathrm{P}(X \leq 4)=\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{4-m}{\frac{2}{2m+1}}\right)$을 구하면 10점 2. 관계식 $\frac{1}{2}(2m+1)(4-m)=-m^2+\frac{7}{2}m+2=2$를 구하면 10점 2. $m^2-\frac{7}{2}m=m\left(m-\frac{7}{2}\right)=0$으로부터 양수 $m=\frac{7}{2}$를 구하면 10점	30

7. 예시 답안

[1-1]

주어진 조건은 $x_1+x_2+x_3+x_4=9$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 2$, $x_4 \geq 0$를 만족한다. 여기에서 x_1은 m_1월 이전에 달 수, x_2는 m_1월과 m_2월 사이의 달 수, x_3는 m_2월과 m_3월 사이의 달수, 그리고 x_4는 m_3이후의 남은 달 수이다. 따라서 $y_2=x_2-2 \geq 0$, $y_3=x_3-2 \geq 0$이라 하면

$$x_1+y_2+y_3+x_4=5,\ x_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

을 만족하는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{H}_5={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_5=\frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1}=56$$

이다.

[1-2]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$ 를 따르므로 $\mathrm{E}(X)=np$이고 $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$이다. 조건 (a)로부터 $np=4np(1-p)$이므로 $p=\frac{3}{4}=\frac{k}{8}$이고 조건 (b)로부터 $\mathrm{P}(X=1)=30\mathrm{P}(X=0)$ 이므로 ${}_n\mathrm{C}_1\, p^1(1-p)^{n-1}=30\,{}_n\mathrm{C}_0\,(1-p)^n$ 으로부터 $np=30(1-p)$ 이다. 따라서 $k=6$이고 $n=10$ 이다.

[1-3]

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{4}{(2m+1)^2}\right)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X \leq 4)=\mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{4-m}{\dfrac{2}{2m+1}}\right)=\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{1}{2}(2m+1)(4-m)\right)$이다.

표준정규분포표로부터 $\mathrm{P}(Z \leq 2)=0.9772$이므로 $\frac{1}{2}(2m+1)(4-m)=2$이다. 따라서 $m=\frac{7}{2}$이다.

[문항카드 8]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열1 / 수학 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 미적분 II
	핵심 개념 및 용어	치환적분, 항등식의 계수비교, 정적분의 성질
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 미분가능한 함수 $h(x)$에 대하여 $t=h(x)$로 놓으면

$$\int g(h(x))h'(x)dx=\int g(t)dt$$

이다.

(나) 함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[-a, a]$에서 연속일 때, 이 구간의 모든 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이면

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx=0$$

이다.

[문항]

사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$가 다음 조건을 만족한다. (단, a, b, c, d는 상수이다.)

> 모든 실수 x에 대하여
>
> $$3f'(x)=(x+3)f''(x)$$
>
> 이다.

【2-1】 $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오. (30점)

【2-2】 함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{f(3)-f(0)}{3}=f'(\alpha)$를 만족시키는 실수 α의 값을 구하시오. (20점)

【2-3】 함수 $f(x)$가

$$\int_{-4}^{-2}\left(\sin\left(\frac{x+3}{2}\right)-\cos\left(\frac{x+3}{2}\right)\right)^2 f(x)\,dx=0$$

을 만족시킬 때, $f(-3)$의 값을 구하시오. (30점)

3. 출제 의도

본 문제는 사차함수와 관련된 성질을 함수의 미적분과 연관시켜 생각할 수 있는지 평가하고자 한다. 특히, 문제의 조건으로부터 치환적분과 항등식의 계수비교를 이용하여 사차함수를 구하고 평균값 정리와 관련된 문제를 풀고 정적분의 성질을 이용한 계산을 할 수 있는지를 평가한다.

[2-1] 제시문과 문제의 조건을 이용하여 사차함수의 도함수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[2-2] 정적분을 이용하여 사차함수를 구하고 평균값 정리와 관련된 삼차방정식을 풀 수 있는지를 평가한다.

[2-3] 제시문과 삼각함수의 성질 및 주어진 사차함수를 이용하여 정적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[미적분 II]- 라. 적분법 1) 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[미적분 II]- 라. 적분법 1) 여러 가지 적분법 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[미적분 II]- 라. 적분법 1) 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

	성취기준· 성취수준	[미적분 II]- 라. 적분법 1) 여러 가지 적분법 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항2-1	교육과정	[미적분 II]- 라. 적분법 1) 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 있다. [수학 I]- 가. 다항식 2) 나머지 정리 ① 항등식의 의미를 이해한다.
	성취기준· 성취수준	[미적분 II]- 라. 적분법 1) 여러 가지 적분법 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적2413-1. 함수 $y=x^n$(n은 실수)의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [수학 I]- 가. 다항식 2) 나머지 정리 수학1121. 항등식의 의미와 그 성질을 이해하고, 이를 활용하여 미정계수를 구할 수 있다.
문항2-2	교육과정	[미적분 II]- 라. 적분법 1) 여러 가지 적분법 ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 있다. [수학 I]- 가. 다항식 3) 인수분해 ① 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [수학 I]- 나. 방정식과 부등식 3) 여러 가지 방정식 ① 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[미적분 II]- 라. 적분법 1) 여러 가지 적분법 미적2413-1. 함수 $y=x^n$(n은 실수)의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [수학 I]- 가. 다항식 3) 인수분해 수학1131. 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [수학 I]- 나. 방정식과 부등식 3) 여러 가지 방정식 수학1231. 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.
문항2-3	교육과정	[미적분 II]- 나. 삼각함수 1) 삼각함수의 뜻과 그래프 ③ 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. [미적분 II]- 라. 적분법 1) 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 있다.
	성취기준· 성취수준	[미적분 II]- 나. 삼각함수 1) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2213. 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. [미적분 II]- 라. 적분법 1) 여러 가지 적분법 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적2413-1. 함수 $y=x^n$(n은 실수)의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2018	30-32, 33-47, 94-96
	미적분 II	신항균 외	지학사	2016	153-161, 167-170
	미적분 II	이준열 외	천재교육	2016	170-182

5. 문항 해설

【2-1】 주어진 조건과 치환적분을 이용하여 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구할 수 있는지를 평가한다. 이를 위하여 항등식의 계수 비교를 통해 $f'(x)$의 계수를 결정할 수 있는지를 평가한다.

【2-2】 구해진 $f'(x)$와 부정적분을 통해 $f(x)$를 구할 수 있는지를 평가한다. 이를 이용하여 평균값 정리와 연계된 α에 관한 삼차방정식을 풀 수 있는지를 평가한다.

【2-2】 삼각함수의 성질, 치환적분 및 대칭함수의 성질을 이용하여 주어진 식에 포함된 정적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	a를 구한다.	14
	b를 구한다.	14
	$\frac{a}{b}$를 구한다.	2
2-2	$\frac{f(3)-f(0)}{3}=15\times 3^3$을 구한다.	5
	$f'(\alpha)$를 구한다.	10
	$\alpha=3\left(\sqrt[3]{\frac{15}{4}}-1\right)$을 구한다.	5
2-3	$f(x)=(x+3)^4+C_2$일 때, 주어진 적분이 $\frac{2}{5}+2C_2$임을 구한다.	25
	$f(-3)$을 구한다.	5

7. 예시 답안

【2-1】

주어진 조건에 의하여

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{3}{x+3}$$

이다. 제시문 (가)를 이용하여

$$\ln|f'(x)|=\int\frac{f''(x)}{f'(x)}dx=\ln|x+3|^3+C_1$$

이다. 따라서

$$|f'(x)| = e^{\ln|f'(x)|} = e^{C_1}|x+3|^3$$

이다. $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로

$$4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = f'(x) = e^{C_1}(x+3)^3$$

이다. 양변의 계수를 비교하면 $a = 12,\ b = 54$이므로

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{9}$$

이다.

【2-2】

[2-1]의 결과로부터

$$f(x) = \int 4(x+3)^3\,dx = (x+3)^4 + C_2$$

이다. 따라서 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3} = 15\times 3^3$ 이고 주어진 식으로부터

$$\begin{aligned} 15\times 3^4 = f(3)-f(0) &= 3f'(\alpha) \\ &= (\alpha+3)f''(\alpha) \\ &= 12(\alpha+3)^3 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $\alpha = 3\left(\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}} - 1\right)$ 이다.

【2-3】

$f(x) = (x+3)^4 + C_2$이고 $\left(\sin\left(\dfrac{x+3}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{x+3}{2}\right)\right)^2 = 1 - \sin(x+3)$이므로

$$\begin{aligned} \int_{-4}^{-2}\left(\sin\left(\frac{x+3}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+3}{2}\right)\right)^2 f(x)dx &= \int_{-4}^{-2}(1-\sin(x+3))\left((x+3)^4 + C_2\right)dx \\ &= \int_{-1}^{1}(1-\sin t)(t^4 + C_2)dt = \frac{2}{5} + 2C_2 \end{aligned}$$

이다. 조건으로부터 $f(-3) = C_2 = -\dfrac{1}{5}$ 이다.

[문항카드 9]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열1 / 수학 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 II, 기하와 벡터
	핵심 개념 및 용어	이차곡선, 접선의 방정식, 삼각함수 덧셈 정리
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 두 초점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$으로부터 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } a>c>0,\ b^2=a^2-c^2)$$

이다.

(나) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다.

(다) 타원

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

위의 점 $(x_{0,}\ y_0)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

이다.

(라) 삼각함수의 덧셈정리

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

[문항]

【3-1】 타원

$$\frac{x^2}{4}+y^2-px-qy+1=0$$

이 x축에 접하고 단축의 길이가 6일 때, 두 초점의 좌표를 구하시오. (단, $p \geq 0, q \geq 0$ 이고 $p^2+\frac{q^2}{4}>1$ 이다.) (30점)

【3-2】 타원

$$\frac{x^2}{4R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$$

과 직선 $l_1 : y=mx$ 의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P 라 하고, 점 P 에서 타원에 접하는 직선을 l_2 라 하자. (단, $R>0,\ m>0$이다.)

(1) 직선 l_2 의 기울기를 $f(m)$ 이라 할 때, $mf(m)$ 을 구하시오. (20점)

(2) 직선 l_1 과 직선 l_2 가 이루는 예각의 크기를 $\theta(m)$이라 할 때, $\theta(m)$이 최소가 되도록 하는 m 의 값을 구하시오. (30점)

3. 출제 의도

【3-1】 타원에 부과된 기하적 <조건>으로부터 타원과 타원의 방정식을 특정할 수 있는지를 묻는 문항이다.

【3-2】 타원의 경우, 타원 위의 한 점에서의 접선의 기울기와 그 점과 타원의 중심을 잇는 직선은 일대일 대응이나, 두 직선이 이루는 각은 타원 위의 점을 따라 변한다.

이 때, 그 점과 타원의 중심을 지나는 직선과 접선이 이루는 예각의 크기의 최댓값은 $\frac{\pi}{2}$를 얻고, 최솟값은 타원의 단축의 길이와 장축의 길이의 비에 의존하여 얻어진다.

위의 사실을 삼각함수의 덧셈정리와, 음함수의 미분법을 이용한 해석기하학적 방법으로 확인해가는 과정을 묻는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 ② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 기벡1112. 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 ② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 기벡1112. 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (다)	교육과정	[기하와 벡터]- 나. 평면곡선 2) 평면곡선의 접선 ① 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터]- 나. 평면곡선 2) 평면곡선의 접선 기벡1121. 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (라)	교육과정	[미적분 II]- 나. 삼각함수 2) 삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II]- 나. 삼각함수 2) 삼각함수의 미분 미적2221-2. 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
문항3-1	교육과정	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 ② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 기벡1112. 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
문항3-2	교육과정	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 ② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. [기하와 벡터]- 나. 평면곡선 2) 평면곡선의 접선 ① 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다. [미적분 II]- 나. 삼각함수 2) 삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [미적분 II]- 나. 삼각함수 1) 삼각함수의 뜻과 그래프 ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. ③ 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터]- 가. 평면곡선 1) 이차곡선 기벡1112. 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. [기하와 벡터]- 나. 평면곡선 2) 평면곡선의 접선 기벡1121. 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다. [미적분 II]- 나. 삼각함수 2) 삼각함수의 미분 미적2221-2. 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [미적분 II]- 나. 삼각함수 1) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2212-1. 삼각함수의 뜻을 알고, 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있다. 미적2213. 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	16-20, 32-36
	기하와 벡터	우정호 외	동아출판	2018	18-23, 40-45
	미적분 II	김창동 외	교학사	2018	75-86
	미적분 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2018	57-76

5. 문항 해설

【3-1】 <조건>으로부터 타원의 방정식을 찾아낼 수 있는지를 평가한다. 평행이동한 타원의 초점의 좌표를 구할 수 있는지를 평가한다.

【3-2】 제시문 (다)를 이용하여 타원 위의 한 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있는지를 평가한다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 각에 대한 탄젠트함수를 구하고, 각이 최소가 될 때를 계산할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	p의 값을 구한다.	10
	q의 값을 구한다.	10
	두 초점 중 하나의 좌표를 구한다.	5
	두 초점 중 다른 하나의 좌표를 구한다.	5
3-2	(1) $f(m)$을 구한다.	15
	(1) $mf(m)$을 구한다.	5
	(2) $\tan(\theta(m))$을 구한다.	10
	(2) m의 값을 구한다.	20

7. 예시 답안

【3-1】

타원의 중심은 $(2p, \frac{q}{2})$이다. 단축의 길이가 6이고, 타원이 x축에 접하므로 $q=6$이다. $(2p, 0)$은 타원 위의 점이므로 $p=1$이다. 따라서 $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$이다. 그러므로 초점의 좌표는 $(2+3\sqrt{3}, 3)$, $(2-3\sqrt{3}, 3)$ 이다.

【3-2】 (1)

타원과 직선 $l_1 : y=mx$의 교점을 $\mathrm{P}(x_{0,} y_0)$이라 하자. $m=\frac{y_0}{x_0}$이고, 점 P에서의 접선 l_2의 기울기 $f(m)=-\frac{x_0}{4y_0}=-\frac{1}{4m}$ 이다. 따라서 $mf(m)=-\frac{1}{4}$이다.

【3-2】 (2)

직선 l_1이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α, 직선 l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 β라 할 때, $m=\tan\alpha$, $f(m)=\tan\beta$이다.

$\beta-\alpha=\pi-\theta(m)$ 이므로 $\tan(\theta(m))=\tan(\pi-(\beta-\alpha))=\frac{m+\frac{1}{4m}}{3/4}=\frac{4m^2+1}{3m}$이다.

$\tan(\theta(m))$은 $m=\frac{1}{2}$일 때 최솟값을 가지므로 $\tan(\theta(m)) \geq \tan(\theta(\frac{1}{2}))$이다. 탄젠트함수는 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 증가함수이므로 $\theta(m) \geq \theta(\frac{1}{2})$이다. 따라서 $\theta(m)$의 최솟값은 $m=\frac{1}{2}$일 때이다.

[문항카드 10]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열1/문제 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 II
	핵심 개념 및 용어	도함수의 활용, 합성함수의 미분, 치환적분, 부분적분
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여
$y=f(g(x))$의 도함수는

$$y'=f'(g(x))g'(x)$$

이다.

(나) 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 닫힌 구간 $[\alpha,\beta]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

이다. (단, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이다.)

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

이다.

[문항]

이차함수 $f(x)=4ax^2-8ax$는

$$\int_e^3 \frac{2}{f(x)}\,dx = 1-\ln(3e-6)$$

을 만족한다. (단, $a>0$이고 e는 자연로그의 밑이다.)

【4-1】 a의 값을 구하시오. (15점)

【4-2】 이차함수 $g(x)=\dfrac{x^2}{4}-x+10$과 구간 $(0,\infty)$에서 정의된 함수

$$h(x)=x^5e^{-g(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{g(x)}}{x^4}\right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $h(1)$의 값을 구하시오. (15점)

(2) $\displaystyle\int_1^2\left(\frac{d}{dx}e^{f(x)}\right)h(x)\,dx=\frac{p}{e}+q$일 때, $p+2q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) (30점)

【4-3】 음이 아닌 두 실수 c, d에 대하여 구간 $I=\left[\dfrac{19}{10},\infty\right)$에서 정의된 함수 $k(x)$는

$$k(x)=\ln(f(x)+c)+e^{-f(x)}-d$$

이다. 함수 $k(x)$가 다음의 조건을 동시에 만족시킬 때, c와 d의 순서쌍 (c,d)가 나타내는 영역의 넓이를 구하시오. (40점)

(a) 모든 $x\geq 2$에 대하여 $k(x)\geq 0$
(b) 모든 x_1, $x_2\in I$에 대하여 $(x_1-x_2)(k(x_1)-k(x_2))\geq 0$

3. 출제 의도

본 문제는 미분가능한 두 함수의 합성함수 형태로 주어진 경우의 미분법과 적분법을 잘 이해하고 해석할 수 있는 지를 평가하고자 한다. 특히, 다항함수와 지수함수 혹은 로그함수가 합성된 합성 함수의 미적분을 잘 활용하여 이 합성 함수들을 잘 이해하고 해석할 수 있는 지를 평가한다.

[4-1] $y=x^n$(n은 실수)의 정적분을 이해하고 이를 활용할 수 있는 지를 평가한다.

[4-2] 다항함수가 지수함수와 합성된 합성 함수의 미적분을 잘 할 수 있는 지를 평가한다.

[4-3] 다항함수가 지수함수, 로그함수와 합성된 합성 함수의 미분을 이용하여 증감을 잘 판별 할 수 있는 지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[미적분II]- 다. 미분법 2) 여러 가지 미분법 ② 합성함수를 미분할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분II]- 다. 미분법 2) 여러 가지 미분법 미적2312. 합성함수를 미분할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[미적분 II] - 라. 적분법 2) 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] - 라. 적분법 2) 여러 가지 적분법 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문 (다)	교육과정	[미적분 II] - 라. 적분법 2) 여러 가지 적분법 ② 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다
	성취기준·성취수준	[미적분 II] - 라. 적분법 2) 여러 가지 적분법 미적2412. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항4-1	교육과정	[미적분 II] - 라. 적분법 4) 여러 가지 함수의 정적분 ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] - 라. 적분법 4) 여러 가지 함수의 정적분 미적2413-1. 함수 $y=x^n$(n은 실수)의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문항4-2	교육과정	[미적분II]- 다. 미분법 2) 여러 가지 미분법 ② 합성함수를 미분할 수 있다. [미적분 II] - 라. 적분법 2) 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분 II] - 라. 적분법 4) 여러 가지 적분법 ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분II]- 다. 미분법 2) 여러 가지 미분법 미적2312. 합성함수를 미분할 수 있다. [미적분 II] - 라. 적분법 2) 여러 가지 적분법 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분 II] - 라. 적분법 4) 여러 가지 함수의 정적분 미적2413-3. 지수함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

문항4-3	교육과정	[미적분II]- 다. 미분법 2) 여러 가지 미분법 ② 합성함수를 미분할 수 있다. [미적분 I] - 다. 다항함수의 미분법 3) 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. ⑤ 방정식과 부등식에 활용할 수 있다. [미적분II]- 라. 적분법 2) 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분II]- 다. 미분법 2) 여러 가지 미분법 미적2312. 합성함수를 미분할 수 있다. [미적분 I] - 다. 다항함수의 미분법 3) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적1335. 방정식과 부등식에 활용할 수 있다. [미적분II]- 라. 적분법 2) 정적분의 활용 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 II	신항균 외	지학사	2016	112-113 157-163
	미적분 II	이준열 외	천재교육	2016	125-130 176-181
	미적분 I	황선욱 외	좋은책 신사고	2016	116-127

5. 문항 해설

【4-1】 주어진 함수를 부분 분수로 분해 한 후 $y=x^n$(n은 실수)의 정적분을 이용하여 적분할 수 있음을 평가한다.

【4-2】 다항함수가 지수함수와 합성된 합성 함수의 미분을 잘 할 수 있는 지를 평가한다. 치환적분내지 부분적분을 이용하여 다항함수가 지수함수와 합성된 합성 함수의 적분을 잘 할 수 있는 지를 평가한다.

【4-3】 다항함수가 지수함수, 로그함수와 합성된 합성 함수의 미분을 이용하여 증감을 잘 판별 할 수 있는 지를 평가한다. 또한 영역의 넓이를 적분으로 잘 구할 수 있는 지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4-1	정적분을 구한다. $\int_e^3 \frac{2}{f(x)}dx = \frac{1}{4a}(1-\ln(3e-6))$	10
	$a=\frac{1}{4}$를 구한다.	5
4-2	(1) $h(x)=xg'(x)-4=\frac{1}{2}x^2-x-4$를 구한다.	10
	(1) $h(1)=-\frac{9}{2}$를 구한다.	5
	(2) 부분적분 또는 $t=2xg'(x)$로 치환적분	5
	(2) $\int_1^2\left(\frac{d}{dx}e^{f(x)}\right)h(x)dx=5e^{-1}-\frac{9}{2}$로 구한다.	20
	(2) $p+2q=-4$를 구한다.	5
4-3	(a), (b)로부터 $0\le d\le \ln c+1$를 구한다.	10
	$k'(x)$를 구한다.	5
	$k'(x)\ge 0$을 확인하기 위해 $f(\frac{19}{10})+c>0$를 확인한다.	5
	(a), (b)로부터 $c\le 1$를 구한다.	10
	영역의 넓이 $\frac{1}{e}$를 구한다.	10

7. 예시 답안

【4-1】

$\int_e^3 \frac{2}{f(x)}dx = \frac{1}{4a}\int_e^3\left\{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right\}dx=\frac{1}{4a}(1-\ln(3e-6))$이다. 조건으로부터 $a=\frac{1}{4}$이다.

【4-2】 (1)

$h(x)=x^5e^{-g(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{g(x)}}{x^4}\right)=xg'(x)-4$이므로 $h(1)=g'(1)-4=-\frac{9}{2}$이다.

【4-2】(2)

$f(x)=2xg'(x)$이고 $t=2xg'(x)$로 치환하여 적분하면

$$\int_1^2\left(\frac{d}{dx}e^{f(x)}\right)h(x)dx=\int_1^2(xg'(x)-4)(2g'(x)-2xg''(x))e^{2xg'(x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2g'(1)}^0(t-8)e^t dt=5e^{-1}-\frac{9}{2}$$

이다. 따라서 $p=5, q=-\frac{9}{2}$이므로 $p+2q=-4$이다.

【4-3】

(b)에 의해 $k(x)$는 증가함수이므로 조건 (a)와 $k(2)=\ln c-d+1\geq 0$는 동치이다. 그러므로 $0\leq d\leq \ln c+1$이다.

(b)에 의해

$$k'(x)=\frac{f'(x)(e^{f(x)}-c-f(x))}{(c+f(x))e^{f(x)}}\geq 0$$

이다. $0\leq d\leq \ln c+1$으로부터 $c\geq \frac{1}{e}$이므로 $x\geq \frac{19}{10}$에 대해 $f(x)+c>0$이다. 그래서 $k'(x)\geq 0$와 $F(x)=e^{f(x)}-c-f(x)\geq 0$ 동치이고, $F(x)$는 $x=2$에서 최솟값을 가지므로 $F(2)=1-c\geq 0$와도 동치이다. 즉, $c\leq 1$이다. 따라서 구하고자 하는 영역의 넓이는 $\int_{\frac{1}{e}}^1(\ln x+1)dx=\frac{1}{e}$이다.