2019학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열Ⅱ 모범답안 및 채점기준

<문제 1>

【1-1】(25점)

○ **모범답안:** 1부터 10까지의 자연수 중에서 3개의 수를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$가지이다. 이 중 꺼낸 3개의 수가 모두 연속하는 경우는 8가지이다. 그리고 3개의 수 중 2개의 수만이 연속되는 경우는

(1) 연속된 두 수가 $(1,2),(9,10)$인 경우는

$(1,2,4),(1,2,5),\cdots,(1,2,10)$의 7가지와 $(1,9,10),(2,9,10),\cdots,(7,9,10)$의 7가지로

총 14가지이다.

(2) 연속된 두 수가 $(1,2),(9,10)$이 아닌 경우는

$(2,3),(3,4),\cdots,(8,9)$를 포함하는 7가지의 각 경우에 대하여 6가지이다.

예를 들어, $(2,3)$을 포함된 경우는 $(2,3,5),(2,3,6),\cdots,(2,3,10)$의 6가지이다.

따라서 총 42가지이다.

그러므로 꺼낸 3개의 수 중 어느 두 수도 연속되지 않은 확률은

$1-\frac{8+14+42}{120}=1-\frac{64}{120}=1-\frac{8}{15}$으로 $\frac{7}{15}$이다.

○ **채점기준:** 모든 경우의 수인 ${}_{10}C_3=120$을 구하면 5점

조건을 만족하는 경우의 수를 구하면 10점

구해진 경우의 수를 이용하여 확률을 구하면 10점

【1-2】(25점)

○ **모범답안:** 조건 (a)로부터 $\mathrm{E}(X)=\frac{25+33}{2}=29$이고

조건 (b)로부터 $P(X\le 23)=P\left(\frac{X-29}{\sigma}\le\frac{23-29}{\sigma}\right)=0.0668$이므로 $\frac{23-29}{\sigma}=-1.5$를 만족한다.

따라서 $m=29$이고 $\sigma=4$이고 확률변수 X는 정규분포 $N(29,4^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le 37)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{37-29}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\le 2)=0.9772$이다.

○ **채점기준:** 조건 (a)로부터 $\mathrm{E}(X)=\frac{25+33}{2}$임을 이용하여 평균 $m=29$를 구하면 5점

조건 (b)로부터 $\frac{23-29}{\sigma}=-1.5$임을 이용하여 표준편차 $\sigma=4$를 구하면 10점

구해진 평균과 표준편차를 이용하여 확률 $\mathrm{P}(X\le 37)$를 구하면 10점

【1-3】

(1) **(20점)**

○ **모범답안:** 임의로 선택한 문항에 대하여 A학생이 정답을 알고 있는 사건을 K, 모르고 있거나 확실하지 않은 사건인 경우 UK, 정답을 택한 사건을 C라고 하자.

임의로 선택한 문항에 대하여 A학생이 정답을 알고 있는 문항이었으며, 이 경우 철수가 정답을 택할 확률은 $\mathrm{P}(\mathrm{C}\cap\mathrm{K})=\mathrm{P}(\mathrm{C}|\mathrm{K})\mathrm{P}(\mathrm{K})$ = 1×0.5이다. 그리고 임의로 선택한 문항에 대하여 A학생이 정답을 모르거나 정답이 확실하지

않는 문항이었으며, 이 경우 A학생이 정답을 택할 확률은

$$\mathrm{P}(\mathrm{C}\cap\mathrm{UK})=\mathrm{P}(\mathrm{C}|\mathrm{UK})\mathrm{P}(\mathrm{UK})\ =\ 0.2\times 0.5\text{이다.}$$

따라서, 임의의 문항에 대하여 철수가 정답을 택할 확률 $p=1\times 0.5+0.2\times 0.5=0.6=\frac{3}{5}$이다.

한편, A 학생이 90점 이상을 받을 확률은

$$\mathrm{P}(X \geq 9) = {}_{10}\mathrm{C}_9 p^9 (1-p)^1 + p^{10} = p^9[10(1-p)^1 + p] = p^9(10-9p)\text{이다.}$$

따라서, $\mathrm{P}(X \geq 9)$ = $(\frac{3}{5})^9\alpha$ = $p^9\alpha$= $p^9(10-9p)$이므로, $\alpha = 10-9p = 10-9\times 0.6 = 4.6$이다.

❍ **채점기준:** 임의의 문항에 대하여 A 학생이 정답을 택할 확률 $p=\frac{3}{5}$임을 구하면 5점

A 학생이 90점 이상을 받을 확률을 구하면 10점

α의 값을 구하면 5점

(2) **(30점)**

❍ **모범답안:**

A학생이 선택한 답이 정답일 확률은 문제 (1)에서 $p=$ $\mathrm{P}(\mathrm{C})=\frac{3}{5}=0.6$이다.

그러므로, 제시문 (나)조건부확률의 정의에 의하여 A학생이 정답을 맞힌 문제가 A학생이 정답을 알고 답하였을 확률은

$$\mathrm{P}(\mathrm{K}|\mathrm{C}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{K}\cap\mathrm{C})}{\mathrm{P}(\mathrm{C})} \quad \frac{1\times 0.5}{0.6} = \frac{5}{6}$$

❍ **채점기준:**

A학생이 선택한 답이 정답일 확률은 문제 (1)에서 $\mathrm{P}(\mathrm{C})=0.6$인 것을 이해한 경우 10점

조건부 확률을 이용하여 $\mathrm{P}(\mathrm{K}|\mathrm{C}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{K}\cap\mathrm{C})}{\mathrm{P}(\mathrm{C})}$식을 사용한 경우 10점

계산을 하여 정답$\frac{5}{6}$을 구한 경우 10점

2019학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열Ⅱ 모범답안 및 채점기준

<문제 2>

【2-1】

(1) (20점) 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$라 하면, 접선 l의 방정식은 $y=-\frac{3x_0}{y_0}x+\frac{3}{y_0}$이므로,

$$t_0=-\frac{3x_0}{y_0},\ u=\frac{y_0}{x_0}.\ \text{즉},\ t_0u=-3.$$

○ **채점기준:** 접선 l의 방정식을 구한다. (5점)
직선 OP의 기울기를 구한다. (5점)
t_0u의 값을 구한다. (10점)

(2) (20점) 조건으로부터 접선 l과 직선 PB가 이루는 각은 l과 직선 PA가 이루는 각 η로 같다. 그러므로 직선 l과 m이 이루는 각은 $\frac{\pi}{2}-\eta$이다. 따라서,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)=\frac{-7-t_0}{1-7t_0}\text{------}(*)$$

그런데, 직선 l과 직선 PB가 이루는 각이 η이므로

$$\tan\eta=\frac{u_0-t_0}{1+u_0t_0}=\frac{-\frac{3}{t_0}-t_0}{1-3}$$

이다.

$$1=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)\cdot\tan\eta=\left(\frac{-7-t_0}{1-7t_0}\right)\cdot\left(\frac{3+t_0^2}{2t_0}\right),\ 2<t_0<5\ \Rightarrow\ t_0=3.$$

(1)로부터 $-1=u_0=\frac{y_0}{x_0}$, $x_0^2+\frac{y_0^2}{3}=1\Rightarrow(x_0,y_0)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 그러므로 접선 l의 방정식은 $y=3x+2\sqrt{3}$. $t_0+2b^2=3+2(2\sqrt{3})^2=27$.

○ **채점기준:** t_0의 값을 구한다. (10점)
점 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$의 좌표를 구한다. (5점)
접선 l의 방정식을 구한다. (5점)

(3) (30점) 직선 OP와 x축의 양의 방향이 이루는 각이 $\frac{3}{4}\pi$이므로 x축과 직선 BC는 평행하다. 그래서, 점 B와 C의 y좌표는 같다. 한편, 타원은 이차식이고 직선 PB는 원점을 지나므로 B의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다. 직선 m의 방정식에 대입하면, C의 x좌표는 $\frac{15}{7}+\frac{\sqrt{3}}{14}$.

○ **채점기준:** 직선 BC와 x축의 관계를 안다. (10점)
점 B의 좌표를 구한다. (15점)
점 C의 x좌표를 구한다. (5점)

【2-2】(30점)

$\angle \mathrm{PBC} = \frac{3}{4}\pi$과 (*) 로부터

$$\tan\theta(t) = \tan\left(\frac{3}{4}\pi - \eta(t)\right) = \frac{-1-\tan\eta(t)}{1-\tan\eta(t)} = \frac{4t+3}{3t-4},$$

$$\sec^2\theta(t) \cdot \theta'(t) = \frac{-25}{(3t-4)^2} \Rightarrow \theta'(4) = \cos^2\theta(4) \cdot \left(-\frac{25}{64}\right) = -\frac{1}{17}$$

❍ **채점기준:** $\tan\theta(t)$를 구한다. (10점)

도함수 $\theta'(t)$를 구한다. (15점)

$\theta'(4)$의 값을 구한다. (5점)

2019학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열Ⅱ 모범답안 및 채점기준

<문제 3>

【3-1】 (15점)

○ 모범답안:

$f(\theta)=\cos^9\theta\sin\theta$라 두면 $f(-\theta)=\cos^9(-\theta)\sin(-\theta)=-\cos^9\theta\sin\theta=-f(\theta)$이므로 $f(\theta)$는 원점에 대하여 대칭 함수이다.

따라서 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^9\theta\sin\theta d\theta=0$이다.

○ 채점기준: $\cos^9\theta\sin\theta$는 원점에 대하여 대칭하는 함수임을 안다. (10점)

기함수의 $-\pi$부터 π적분이 0임을 안다. (5점)

【3-2】 (35점)

○ 모범답안: A= $\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t\cos\theta+\sin t\sin\theta)^9(\cos\theta+\sin\theta)d\theta$를 먼저 계산을 하자.

$A=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^9(t-\theta)(\cos\theta+\sin\theta)d\theta$

$\phi=t-\theta$로 치환하면

$A=-\int_{t+\pi}^{t-\pi}\cos^9\phi(\cos(t-\phi)+\sin(t-\phi))d\phi$을 얻는다.

$g(\phi)=\cos^9\phi(\cos(t-\phi)+\sin(t-\phi))$라 놓으면

$A=\int_{t-\pi}^{-\pi}g(\phi)d\phi+\int_{-\pi}^{t+\pi}g(\phi)d\phi$으로 나눌 수 있다.

$g(\phi)=g(2\pi+\phi)$이므로

$\int_{t-\pi}^{-\pi}g(\phi)d\phi=\int_{t-\pi}^{-\pi}g(\phi+2\pi)d\phi=\int_{t+\pi}^{\pi}g(\phi)d\phi$이다.

따라서 $A=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^9\phi(\cos(t-\phi)+\sin(t-\phi))d\phi$이다.

제시문 (가) (삼각함수의 덧셈정리)와 【3-1】에 의하여

$A=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{10}\phi d\phi(\cos t+\sin t)+\int_{-\pi}^{\pi}\cos^9\phi\sin\phi d\phi(\sin t-\cos t)$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{10}\phi d\phi(\cos t+\sin t)$

이다.

부분적분을 두 번 적용하면 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{10}\phi d\phi=\frac{63}{80}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^6\phi d\phi$이다.

따라서, $h(t)=\frac{63}{80}(\cos t+\sin t)$이다.

$h(t)=\frac{21}{80}$을 만족하는 t에 대하여 $\frac{21^2}{80^2}=h(t)^2=\frac{63^2}{80^2}(1+2\cos t\sin t)$이므로 $\cos t\sin t=-\frac{4}{9}$이다.

○ **채점기준:** 치환 적분 $\phi = t - \theta$을 한다. (5점)

주기 함수의 주기 구간 적분의 값이 변하지 않음을 안다. (10점)

$\mathrm{A} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{10}\phi d\phi (\cos t + \sin t)$을 구한다. (10점)

부분적분을 하여 $h(t)$를 구한다. (5점)

제곱하여 $\cos t \sin t$을 구한다. (5점)

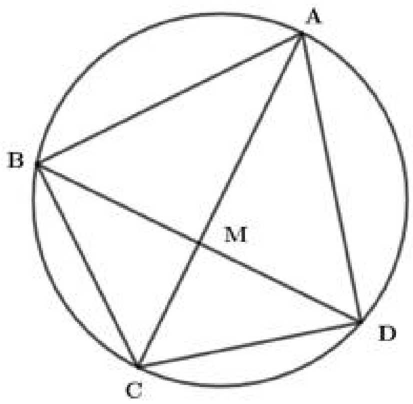
2019학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열Ⅱ 모범답안 및 채점기준

<문제 4>

【4-1】(20점) 세 점 A,B,D을 지나는 평면을 α라 하면, 점 M은 선분 BD의 중점이므로 α 위에 있다. 조건 (b)를 이용하면,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= -k(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}) = -k(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= -k(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}})\end{aligned}$$



이므로

$$(1+k)(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}) = 2k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

이다. M이 선분 BD의 중점이므로

$$(1+k)\overrightarrow{\mathrm{AM}} = (1+k)\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2} = \frac{2}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

이다. 따라서 점 C는 직선 AM위에 위치하므로 네 점 $\mathrm{A, B, C, D}$는 평면 α위에 있고

$$\overline{\mathrm{AM}} : \overline{\mathrm{MC}} = k : 1$$

이다.

❍ **채점기준:** ①=2 (10점), ②=1 (10점), 부분 점수 없음

【4-2】(40점) $\theta(k) = \angle \mathrm{BAC}$라 하자. 조건 (a)와 【4-1】에 의해 선분 AC와 선분 BD는 선분 BD의 중점 M에서 수직으로 만나므로 $\overline{\mathrm{AC}} = 2R(k)$이고 두 직각 삼각형 ACB와 BCM는 닮음이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{MC}}$ 이고, $\overline{\mathrm{MC}} = l$이라 두면 【4-1】에 의해 $\overline{\mathrm{AC}} = (k+1)l$이다. 이로부터 $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{k+1}\,l$임을 알 수 있고, $\sin(\theta(k)) = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \dfrac{\sqrt{k+1}\,l}{(k+1)l} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ 이고 $\cos(\theta(k)) = \sqrt{\dfrac{k}{1+k}}$ 이다.

□ABCD의 내접원의 중심을 M′이라 하면 삼각형 ABC와 삼각형 ADC가 선분 AC에 대칭이므로 점 M′은 선분 AC위에 있다. 점 M′에서 선분 AB와 선분 CB에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{M'}_1$과 $\mathrm{M'}_2$으로 두면 $r(k) = \overline{\mathrm{M'M'}_1} = \overline{\mathrm{M'M'}_2}$이고 두 직각 삼각형 $\mathrm{AM'M'}_1$와 $\mathrm{M'CM'}_2$는 닮음이다. 따라서

$$R(k) = \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{AM'}}+\overline{\mathrm{M'C}}) = \frac{r(k)}{2\sin(\theta(k))} + \frac{r(k)}{2\cos(\theta(k))}$$

이므로

$$\frac{r(k)}{R(k)} = \frac{2\sin(\theta(k))\cos(\theta(k))}{\sin(\theta(k))+\cos(\theta(k))} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{1+k}(1+\sqrt{k})}$$

이다.

❍ **채점기준:** 두 직각 삼각형 ACB와 BCM의 닮음을 이용한다. (10점)
$\sin(\theta(k))$를 구한다. (5점)
$\cos(\theta(k))$를 구한다. (5점)
두 직각 삼각형 $\mathrm{AM'M'}_1$와 $\mathrm{M'CM'}_2$의 닮음을 이용한다. (5점)
$R(k)$를 $r(k)$, $\sin(\theta(k))$ 그리고 $\cos(\theta(k))$로 나타낸다. (10점)
$\dfrac{r(k)}{R(k)}$를 구한다. (5점)

【4-3】(40점) 원점 $\mathrm{O}(0,0,0)$를 두 평면 α와 β위로 정사영한 점을 각각 O_α와 O_β라 두면, O_α는 □ABCD의 외접원의 중점이다. 여기서 세 점 $\mathrm{O, O_\alpha, A}$는 $\angle \mathrm{OO_\alpha A} = \dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형을 이루고, 제시문 (나)에 의하여 $\overline{\mathrm{OO}_\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{2+k^2}}$이고, $\overline{\mathrm{OA}} = 1$이므로

$$R(k) = \overline{\mathrm{O}_\alpha\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{1+k^2}{2+k^2}}$$

이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=2R(k)=2\sqrt{\dfrac{1+k^2}{2+k^2}}$ 이고 【4-1】에 의해 $\overline{\mathrm{MC}}=\dfrac{2}{1+k}\sqrt{\dfrac{1+k^2}{2+k^2}}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{OO}_\beta}=\overline{\mathrm{O}_\alpha\mathrm{M}}=R(k)-\overline{\mathrm{MC}}=\frac{k-1}{k+1}\sqrt{\frac{1+k^2}{2+k^2}}$$

이다. 구 S가 평면 β와 만나는 원의 반지름을 $R_\beta(k)$라 두면 피타고라스 정리에 의해 다음을 알 수 있다.

$$R_\beta(k)=\sqrt{1-\left(\overline{\mathrm{OO}_\beta}\right)^2}=\sqrt{\frac{4k^3+k^2+6k+1}{(k+1)^2(2+k^2)}}$$

따라서 구 S가 평면 β와 만나는 원의 넓이는

$$A_\beta(k)=\frac{\pi(4k^3+k^2+6k+1)}{(k+1)^2(2+k^2)}$$

이다.

○ **채점기준:** $R(k)$를 구한다. (10점)
$\overline{\mathrm{MC}}$를 구한다. (10점)
$\overline{\mathrm{OO}_\beta}$를 구한다. (10점)
$R_\beta(k)$를 구한다. (5점)
$A_\beta(k)$를 구한다. (5점)