2019학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열Ⅱ 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과)

시 험 시 간	100분	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		㊞
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열Ⅱ 문제지와 자연계열Ⅱ 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 제외하고 4쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 수학 2매(4쪽)으로 구성되어 있음,
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, <u>반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것</u>(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 서로 다른 n개에서 $r\,(0 \le r \le n)$개를 택하는 조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

이다. (단, ${}_{n}\mathrm{C}_{0} = 1$)

(나) 확률이 0이 아닌 두 사건 A, B에 대하여, 사건A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 다음을 만족시킨다.

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

(다) (1) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

(2) 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다고 할 때, Z의 확률밀도함수 $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$은 직선 $z=0$에 대하여 대칭이고, 표준정규분포표의 일부분은 다음과 같다.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
3.0	0.4987

(라) 한 번의 시행에서 어떤 사건 A가 일어날 확률이 p이고, 일어나지 않을 확률이 q일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라고 하면, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=k) = {}_{n}\mathrm{C}_{k}\, \mathrm{p}^{k} \mathrm{q}^{n-k}$$

이다. (단, $k = 0, 1, 2, \cdots, n,\ \ p+q=1$)

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】 1부터 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 임의로 택할 때, 그 세 수 중 어느 두 수도 연속하지 않을 확률을 구하시오. (25점)

【1-2】 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

<조건>

(a) $\mathrm{P}(X \ge 25) = \mathrm{P}(X \le 33)$

(b) $\mathrm{P}(X \le 23) = 0.0668$

$\mathrm{P}(X \le 37)$을 구하시오. (25점)

【1-3】 오지선다형 문제로 구성된 수학문제집이 있다. A 학생은 이 문제집에서 50%의 문항은 정답을 확실히 알고 있고, 나머지 50%의 문항은 정답을 모르거나 확실치 않다. A 학생은 이 문제집에서 임의로 열 개의 문항을 택하여 시험을 치른다. 정답을 모르거나 확실하지 않은 문항의 경우 다섯 개의 보기 중 임의로 한 개를 반드시 선택한다고 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) 각 문항의 배점은 10점이라고 할 때, A 학생이 90점 이상을 받을 확률은 $\left(\dfrac{3}{5}\right)^9 \alpha$이다. 이때, α의 값을 구하시오. (20점)

(2) A 학생이 정답을 맞힌 문제에 대하여 A 학생이 정답을 정확히 알고 택하였을 확률을 구하시오. (30점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$라고 할 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이다.

(나) 각 θ_1, θ_2에 대해, 다음 등식이 성립한다.

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2},$$

$$\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

(다) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

이다.

(라) 기울기가 a인 직선 $y=ax+b\ (a\ne0)$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이면 $a=\tan\theta$ 이다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

좌표평면에서 타원

$$E:\ x^2+\frac{y^2}{3}=1$$

과 직선

$$m:\ 7x+y=15$$

가 있다. 타원 E 위를 움직이는 제2사분면의 점 P에서의 접선 l에 대하여 타원 위의 한 점 B, 직선 m 위의 두 점 A, C가 다음 조건을 만족시킨다.

<조건>

(a) 직선 m의 방향벡터를 $\vec{w}$ 라 할 때,

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{w}=0$$

이다.

(b) 접선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 할 때,

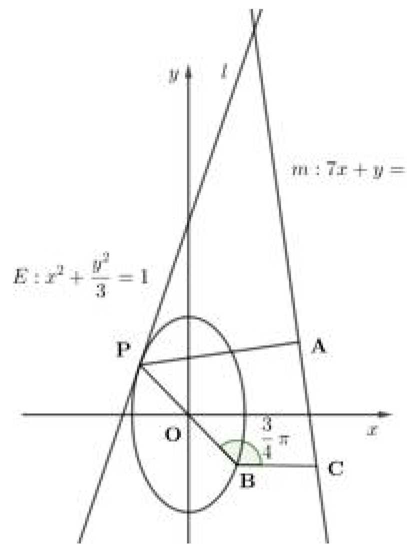
$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}})+|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})=0$$

이다.

(c) 각 $\angle\mathrm{PBC}$의 크기는 $\frac{3}{4}\pi$이다.

점 P에서의 접선 l의 기울기를 t라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $2<t<5$)

【2-1】 직선 PB가 원점 O$(0,0)$를 지날 때, 접선 l의 기울기 $t=t_0$라 하자.



(1) 직선 PB의 기울기를 u라 할 때, t_0u의 값을 구하시오. (20점)

(2) 접선 l의 y절편이 b일 때, t_0+2b^2의 값을 구하시오. (20점)

(3) 점 C의 x좌표를 구하시오. (30점)

【2-2】 접선 l과 직선 BC가 이루는 각을 $\theta(t)\left(0<\theta(t)<\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때, 미분계수 $\theta'(4)$를 구하시오. (30점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 각 θ_1, θ_2에 대해, 다음 등식이 성립한다.

$$\sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$$

(나) 닫힌구간 $[a, b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, 두 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$가 각각 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

이다.

(다) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 닫힌구간$[\alpha, \beta]$에서 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

【3-1】 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^9\theta\sin\theta\,d\theta$의 값을 구하시오. (15점)

【3-2】 임의의 실수 t에 대하여 함수 $h(t)$를

$$h(t)=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t\cos\theta+\sin t\sin\theta)^9(\cos\theta+\sin\theta)d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^6\theta d\theta}$$

라 하자. $h(t)=\frac{21}{80}$을 만족하는 실수 t에 대하여 $\cos t\sin t$의 값을 구하시오. (35점)

수학(문제 4)

[4] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 영벡터가 아닌 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$이 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned}$$

이다.

(나) 영벡터가 아닌 공간벡터 $\vec{h}=(a,b,c)$에 수직인 평면 $ax+by+cz+d=0$과 주어진 점 $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

이다.

(다) 좌표공간에서 중심이 $\mathrm{C}(a,b,c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

좌표공간에서 중심이 원점 O(0,0,0)이고 반지름의 길이가 1인 구를 S라 하자. 구 S위에 서로 다른 네 점 A, B, C, D는 다음 조건을 만족시킨다.

<조건>

(a) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+k\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ (단, $k>1$인 실수)

다음 물음에 답하시오.

【4-1】 선분 BD의 중점을 M이라 하자. 다음은 네 점 A, B, C, D가 한 평면 위에 있음을 증명하고, 선분 AM과 선분 MC의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> 세 점 A,B,D를 지나는 평면을 α라 하면, 점 M은 선분 BD의 중점이므로 α 위에 있다. 조건 (b)를 이용하면,
>
> $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= -k(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}) \\ &= -k(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\boxed{①}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}})\end{aligned}$$
>
> 이므로
>
> $$(1+k)(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})=\boxed{①}\,k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
>
> 이다. M이 선분 BD의 중점이므로
>
> $$(1+k)\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{\boxed{①}}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
>
> 이다. 따라서 점 C는 직선 AM 위에 위치하므로 네 점 A, B, C, D는 평면 α 위에 있고
>
> $$\overline{\mathrm{AM}}:\overline{\mathrm{MC}}=k:\boxed{②}$$
>
> 이다.

위의 ①과 ②에 알맞은 수를 구하시오. (20점)

【4-2】 사각형 ABCD에서 내접원의 반지름의 길이를 $r(k)$, 외접원의 반지름의 길이를 $R(k)$라 할 때,

$$\frac{r(k)}{R(k)}$$

를 구하시오. (40점)

【4-3】 네 점 A, B, C, D가 지나는 평면의 방정식을

$$\alpha : x+y+kz=1$$

라 하자. 선분 BD를 포함하고 평면 α에 수직인 평면을 β라 할 때, 구 S와 평면 β가 만나는 원의 넓이를 구하시오. (40점)