

2019학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사
자연계열 I 모범답안 및 채점기준

<문제 1>

【1-1】 (20점)

○ 모범답안: 각 자리의 숫자의 합이 6인 여섯 자리 자연수 중에서

(i) 0을 한 개도 사용하지 않고 만든 숫자는 111111의 한 가지뿐이다.

(ii) 0을 한 개 사용하여 만든 숫자는 0, 1, 1, 1, 1, 2로 이루어져 있으므로

(1) 첫째자리에 1이 오는 경우는 나머지 숫자 0, 1, 1, 1, 2를 배열하는 방법의 수는 $\frac{5!}{3!} = 20$

(2) 첫째자리에 2가 오는 경우는 나머지 숫자 0, 1, 1, 1, 1을 배열하는 방법의 수는 $\frac{5!}{4!} = 5$

(i), (ii)에서 구하는 모든 자연수의 개수는 $1 + 20 + 5 = 26$ 개다.

○ 채점기준: 0을 한 개도 사용하지 않는 경우와 0을 한 개 사용하는 경우로 나누면 5점
각 조건으로부터 모든 경우의 수를 구하면 15점

【1-2】 (30점)

○ 모범답안: 조건 (a)로부터 $E(X) = \frac{25+33}{2} = 29$ 이고

조건 (b)로부터 $P(X \leq 23) = P\left(\frac{X-29}{\sigma} \leq \frac{23-29}{\sigma}\right) = 0.0668$ 이므로 $\frac{23-29}{\sigma} = -1.5$ 이다.

따라서 $m = 29$ 이고 $\sigma = 4$ 이고 확률변수 X 는 정규분포 $N(29, 4^2)$ 을 따르므로

$$P(X \leq 37) = P\left(Z \leq \frac{37-29}{4}\right) = P(Z \leq 2) = 0.9772 \text{이다.}$$

○ 채점기준: 조건 (a)로부터 $E(X) = \frac{25+33}{2}$ 임을 이용하여 평균 $m = 29$ 를 구하면 10점

조건 (b)로부터 $\frac{23-29}{\sigma} = -1.5$ 임을 이용하여 표준편차 $\sigma = 4$ 를 구하면 10점

구해진 평균과 표준편차를 이용하여 확률 $P(X \leq 37)$ 를 구하면 10점

【1-3】

(1) (25점)

○ 모범답안: A, B, C 주사위 각각에 대하여

선택된 주사위가 A인 경우 빨간색(R), 노란색(Y), 노란색(Y)가 나올 확률은

$$P(RYY \cap A) = P(RYY|A)P(A) = \left(\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}\right) \times \frac{1}{3} \text{이다.}$$

선택된 주사위가 B인 경우 빨간색(R), 노란색(Y), 노란색(Y)가 나올 확률은

$$P(RYY \cap B) = P(RYY|B)P(B) = \left(\frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6}\right) \times \frac{1}{3} \text{이다.}$$

선택된 주사위가 C인 경우 빨간색(R), 노란색(Y), 노란색(Y)가 나올 확률은

$$P(RYY \cap C) = P(RYY|C)P(C) = \left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{3} \text{이다.}$$

주사위 A, B, C가 선택되는 사건은 서로 배반사건이므로, 주사위 A, B, C 중 임의의 주사위를 한 개 선택하여 그 주사위를 3회 던져 빨간색, 노란색, 노란색이 나올 확률은

$$\begin{aligned} P(RYY) &= P(RYY \cap A) + P(RYY \cap B) + P(RYY \cap C) \\ &= \left(\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}\right) \times \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6}\right) \times \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27} \text{이다.} \end{aligned}$$

- **채점기준:** 조건부 확률을 이용하여 각각 주사위 A, B, C에 대한 확률을 구한 경우 15점
서로 배반임을 이해하여 $P(RYY)$ 을 경우 10점

(2) (25점)

○ **모범답안:** 문제 (1)에서 주사위 A, B, C 중 임의의 주사위를 한 개 선택하여 그 주사위를 3회 던져 빨간색, 노란색, 노란색이 나올 확률은 $P(RYY) = \frac{2}{27}$ 이다. 따라서, 임의의 주사위를 선택하여 빨간색, 노란색, 노란색인 나왔을

때 그 주사위가 A일 확률은 $P(A|RYY)$ 이므로, 제시문 (나)조건부확률의 정의에 의하여

$$P(A|RYY) = \frac{P(RYY \cap A)}{P(RYY)} = \frac{\left(\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}\right) \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{27}} = \frac{9}{16} \text{이다.}$$

- **채점기준:** 제시된 문항이 조건부 확률임을 이해하여 관계식을 구한 경우 15점
관계식을 이용하여 정답을 구한 경우 10점

2019학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사
자연계열 I 모범답안 및 채점기준

<문제 2>

【2-1】 (20점)

○ 모범답안: 구 S 가 세 점 A, B, C 를 지나므로 주어진 구의 방정식으로부터

$$\begin{cases} 5p + 7r = -66 \\ p + 3q = -2 \\ 3p + 2r = -22 \end{cases}$$

이다. 이 식을 정리하면 $p = -2, q = 0, r = -8$ 이다. 따라서 $p^2 + q^2 + r^2 = 68$ 이다.

○ 채점기준: p, q, r 을 제대로 구하고 $p^2 + q^2 + r^2$ 의 값을 구한 경우 20점

p, q, r 을 제대로 구했지만 $p^2 + q^2 + r^2$ 의 값을 구하지 못한 경우 15점

p, q, r 중 두 개의 값만 구한 경우 10점

p, q, r 중 한 개의 값만 구한 경우 5점

나머지 경우 0점

【2-2】 (30점)

○ 모범답안: 제시문 (가)로부터 선분 CD 를 1 : 7로 내분하는 점의 좌표는 $P\left(\frac{a+42}{8}, \frac{b}{8}, \frac{9}{2}\right)$ 이다. 점 P 가 평면 α 위에 있으므로

$$a + b = 4$$

이다. 【2-1】에서 구 S 의 방정식은 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z - 8 = 0$ 이다. 구 S 가 점 D 를 지나므로

$$a^2 - 2a + b^2 = 8$$

이다. 그러므로 $(a, b) = (1, 3)$ 또는 $(a, b) = (4, 0)$ 이다. $b > 0$ 이므로 $(a, b) = (1, 3)$ 이다. 따라서 점 D 의 좌표는 $D(1, 3, 8)$

이다. 직선 l 의 방향벡터와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 직선 l 과 평면 α 의 법선벡터가 이루는 각은 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 이다. 직선 l 의 방향벡터와 평면 α 의 법선벡터는 각각 $\vec{u} = (5, -3, -4)$ 와 $\vec{n} = (2, 2, -1)$ 이므로 제시문 (나)로부터

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{u}\| \|\vec{n}\|} = \frac{4\sqrt{2}}{15}$$

이다. 따라서 $\sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{15}$ 이다.

○ 채점기준: 점 D 의 좌표를 구하고 직선 l 의 방향벡터와 평면 α 의 법선벡터를 구한 후 $\sin \theta$ 의 값을 구하면 30점
점 D 의 좌표를 구하고 직선 l 의 방향벡터와 평면 α 의 법선벡터를 구하였지만 $\sin \theta$ 의 값을 구하지 못한 경우 20점

점 D 의 좌표를 구한 경우 15점

내분점 P 의 좌표를 구하고 $a + b$ 의 값을 계산한 경우 10점

내분점 P 의 좌표를 구했지만 $a + b$ 의 값을 계산하지 못한 경우 5점

나머지 경우 0점

【2-3】 (30점)

○ 모범답안: 구 S 의 방정식은 $(x-1)^2+y^2+(z-4)^2=25$ 이므로 구의 중심은 $(1,0,4)$ 이고 반지름의 길이는 5이다. 제시문 (다)로부터 구 S 의 중심과 평면 α 사이의 거리는 3이다. 그러므로 구 S 가 평면 α 에 의하여 나누어지는 두 부분의 부피는 구 $x^2+y^2+z^2=25$ 가 점 $(3,0,0)$ 을 지나고 x 축에 수직인 평면에 의하여 나누어지는 두 부분의 부피와 같다.

따라서 제시문 (라)에 의하여 큰 부분과 작은 부분의 부피는 각각

$$V_1 = \pi \int_{-5}^3 (25-x^2)dx = \frac{448}{3}\pi \text{와 } V_2 = \pi \int_3^5 (25-x^2)dx = \frac{52}{3}\pi$$

이다. 따라서 두 부분의 부피의 차는

$$V_1 - V_2 = 132\pi$$

이다.

- 채점기준: 두 부분의 부피를 모두 제대로 구하고 두 부분의 부피의 차를 구한 경우 30점
두 부분의 부피를 구하였지만 두 부분의 차를 구하지 못한 경우 25점
두 부분 중 한 부분의 부피만을 구한 경우 15점
나머지 경우 0점

2019학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사
자연계열 I 모범답안 및 채점기준

<문제 3>

【3-1】 (20점)

○ 모범답안: $f(0)=0$ 이므로 $k=-1$ 이다. 삼각형의 넓이를 구하면

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot f(1) = \frac{1}{2}(a^b + k)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |f(-1)| = -\frac{1}{2}(a^{-b} + k)$$

이다. $T_1 = 2T_2$ 이므로 $a^b + k = -2(a^{-b} + k)$, 즉 $(a^b)^2 - 3a^b + 2 = 0$ 이다. 그러므로 $a^b = 1$ 또는 $a^b = 2$ 이다. $a > 1$, $b \neq 0$ 이므로 $a^b = 2$ 이다.

(1) $f(1) - k = a^b = 2$

○ 채점기준: k 의 값을 구한다. (5점)

넓이의 관계식을 이용하여 지수방정식을 풀고 해를 구한다. (5점)

(2) $a^b = 2$ 이므로 자연수 n 에 대하여 $a = \sqrt[n]{8}$ 이면 $b_n = \frac{n}{3}$ 이다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{30} b_n = \sum_{n=1}^{30} \frac{n}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{30 \cdot 31}{2} = 155$$

이다.

○ 채점기준: 지수의 성질을 이용하여 b_n 을 구한다. (5점)

수열의 합을 구한다. (5점)

【3-2】 (60점)

○ 모범답안: 지수법칙에 의하여 $f(x) = a^{bx} + k = 2^x - 1$ 이다. 점 $P(t, f(t))$ 에서의 미분계수가 $f'(t) = 2^t \ln 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = 2^t \ln 2(x - t) + 2^t - 1$$

이다. 접선이 x 축과 만나는 점을 Q, 점 P를 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 Q의 x 좌표가 $x = t - \frac{2^t - 1}{2^t \ln 2}$ 이므로

로 넓이 $S(t)$ 는

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t (2^x - 1) dx - (\Delta PQH \text{의 넓이}) \\ &= \frac{2^t - 1}{\ln 2} - t - \frac{(2^t - 1)^2}{2^{t+1} \ln 2} \\ &= \frac{2^{2t} - 1}{2^{t+1} \ln 2} - t \\ &= \frac{1}{2 \ln 2} \{f(t) - f(-t)\} - t \end{aligned}$$

이다.

(1) $t=1$ 일 때 접선의 방정식은 $y=2\ln 2(x-1)+1$ 이다.

○ 채점기준: $t=1$ 에서 미분계수를 구한다. (10점)

접선의 방정식을 구한다. (10점)

(2) $S(t) = \frac{1}{2\ln 2} \{f(t) - f(-t)\} - t$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{2\ln 2}$, $\beta = -\frac{1}{2\ln 2}$, $\gamma = -1$ 이다. 따라서 $\alpha\beta\gamma = \frac{1}{4(\ln 2)^2}$ 이다.

○ 채점기준: 넓이를 적분으로 나타낸다. (5점)

$s(t)$ 를 계산하여 구한다. (10점)

상수 α, β, γ 의 값을 구한다. (5점)

(3) $f'(t) = 2^t \ln 2$, $\{f(-t)\}' = -2^{-t} \ln 2$ 이므로 $S'(t) = \frac{1}{2}(2^t + 2^{-t}) - 1$ 이다. $S'(t) = \frac{1}{12}$ 이므로 $2^t + 2^{-t} = \frac{13}{6}$, 즉

$6 \cdot 2^{2t} - 13 \cdot 2^t + 6 = 0$ 이다. 따라서 $2^t = \frac{2}{3}$ 또는 $2^t = \frac{3}{2}$ 이다. 그런데 $t > 0$ 이므로 $2^t = \frac{3}{2}$ 이다. 따라서

$f(t) = 2^t - 1 = \frac{1}{2}$ 이다.

○ 채점기준: $S'(t)$ 에 대한 식을 구한다. (10점)

방정식을 풀고 해를 구한다. (10점)

2019학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사
자연계열 I 모범답안 및 채점기준

<문제 4>

【4-1】 (20점) $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ 에서,

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}) &= \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - h^{-1}(u)) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 (h^{-1}(u) - \frac{1}{2}) du \\ &= - \int_0^{\frac{1}{2}} h^{-1}(u) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 h^{-1}(u) du = (\int_0^{\frac{1}{2}} h(u) du - \frac{1}{4}) + (\frac{3}{4} - \int_{\frac{1}{2}}^1 h(u) du) \end{aligned}$$

이다. 한편, $\int_0^{\frac{1}{2}} h(u) du = [-\frac{u^4}{2} + u^3]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{32}$, $\int_{\frac{1}{2}}^1 h(u) du = [-\frac{u^4}{2} + u^3]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{13}{32}$ 이므로 $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$ 이다.

○ 채점기준: 적분구간을 나눈다. (5점)

역함수 h^{-1} 의 적분값을 구한다. (각 5점)

$f(\frac{1}{2})$ 를 구한다. (5점)

【4-2】 (40점) 제시문 (가)를 이용하면,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{h(x)} (x - h^{-1}(u)) du + \int_{h(x)}^1 (h^{-1}(u) - x) du \\ &= xh(x) - F(h(x)) + F(0) + F(1) - F(h(x)) - x(1 - h(x)) \\ &= 2xh(x) - x - 2F(h(x)) + F(0) + F(1) \end{aligned}$$

이므로, $a=2, b=-1, c=F(0)+F(1)$ 이다. 따라서, $2a+b=3$.

○ 채점기준: 적분구간을 나눈다. (10점)

a 의 값을 구한다. (15점)

b 의 값을 구한다. (15점)

【4-3】 (30점) 【4-2】의 등식을 x 에 대해 미분하면 제시문 (나)에 의해,

$$f'(x) = 2(h(x) + xh'(x)) - 1 - 2F'(h(x))h'(x) = 2h(x) - 1$$

이므로, $f'(x_0) = 2h(x_0) - 1 = -\frac{13}{27}$ 로부터 $h(x_0) = \frac{7}{27}$ 이다. 즉, $-2x_0^3 + 3x_0^2 - \frac{7}{27} = -2(x_0 - \frac{1}{3})(x_0^2 - \frac{7}{6}x_0 - \frac{7}{18}) = 0$ 이다.

그런데, $0 < x_0 < 1$ 이므로, $x_0 = \frac{1}{3}$ 이다.

○ 채점기준: $f'(x)$ 를 구한다. (15점)

x_0 의 값을 구한다. (15점)