2018학년도 경북대학교 대학입학 수시모집

논술(AAT) 자연계열Ⅰ 문제지

시 험 시 간	15:30 ~ 17:10 (100분)	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		㊞
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열Ⅰ 문제지와 자연계열Ⅰ 답안지가 맞는지 반드시 확인하여야 함

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 제외하고 4쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 2매(4쪽)로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, <u>반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것</u>(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이다.

(나) 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $f'(x), g'(x)$가닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[\ f(x)g(x)\ \Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} a\left|x - \dfrac{\pi}{2}\right| & (-\pi \le x \le \pi) \\ 0 & (x < -\pi,\ x > \pi) \end{cases}$$

일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a는 상수이다.)

【1-1】 상수 a의 값을 구하시오. (30점)

【1-2】 확률 $\mathrm{P}\left(\left|X - \dfrac{\pi}{2}\right| \le \pi\right)$를 구하시오. (20점)

【1-3】 자연수 n에 대하여

$$b_n = \int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\, dx$$

일 때, $\dfrac{b_2}{b_5}$의 값을 구하시오. (50점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는 각각

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right),$$

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)\quad (\text{단, } m\neq n)$$

이다.

(나) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$이 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{aligned}$$

이다.

(다) 좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\quad (\text{단, } x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2,\ z_1\neq z_2)$$

이고, $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$, $z_1=z_2$이면 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ z=z_1$$

이다.

(라) 좌표공간에서 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$에 수직이고 점 $A(x_1, y_1, z_1)$을 지나는 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

좌표공간에 네 점 $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,1)$, $D(a,b,1)$이 있다. 점 A에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 P라고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, b는 양수이다.)

【2-1】 (1) 점 P의 좌표를 구하시오. (20점)

(2) 평면 ACD와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$를 a와 b에 관한 식으로 나타내시오. (20점)

(3) $ab=3$일 때, 삼각형 ACD의 넓이의 최솟값을 구하시오. (20점)

【2-2】 선분 AD를 $m:n$으로 내분하는 점을 Q라고 하자. $a=1$이고 $b=3$일 때, 직선 AC와 평면 BPQ가 만나지 않기 위한 m과 n의 값을 구하시오. (단, m과 n은 서로소인 자연수이다.) (40점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (1) 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수는

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

이다.

(2) 서로 다른 n개에서 $r\,(0\le r\le n)$개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

이다. 단, ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$이다.

(3) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_n\Pi_r = n^r$$

이다.

(나) (1) 어떤 시행에서 원소가 유한개인 표본공간 S에 대하여 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

로 정의한다. (단, $n(A)$는 사건 A의 원소의 개수이다.)

(2) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B)$$

가 성립한다. $A\cup B$는 A 또는 B가 일어나는 사건이고, $A\cap B$는 A와 B가 동시에 일어나는 사건이다.

(3) 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났다는 조건 아래에서 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호 $\mathrm{P}(B|A)$로 나타내며 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)\ne 0)$$

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

【3-1】 1부터 4까지의 자연수가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 세 학생 A, B, C가 순서대로 상자에서 공을 한 개씩 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 상자에 넣는 시행을 하려고 한다. 세 학생 A, B, C가 공을 꺼내는 경우의 수와 각 학생이 서로 다른 숫자가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수를 각각 구하시오. (20점)

(2) 상자에 들어 있는 4개의 공을 꺼내어 세 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 한 개의 공도 받지 못하는 학생이 있을 수 있고, 세 학생 A, B, C가 각 공을 받을 확률은 모두 같다. 세 학생 A, B, C 모두 적어도 한 개의 공을 받을 확률을 구하시오. (20점)

(3) 【3-1】(2)에서 세 학생 A, B, C 모두 적어도 한 개의 공을 받았다고 할 때, 학생 A가 가진 공에 적힌 수가 모두 짝수일 확률을 구하시오. (20점)

【3-2】 두 사건 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(a) $\frac{1}{2} < \mathrm{P}(A) < 1,\ 0 < \mathrm{P}(B) < 1$
(b) $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A\|B)$

$\mathrm{P}(A) = c$일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\mathrm{P}(B) = p$일 때 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최댓값 q를 가진다. $p+\sqrt{q}$의 값을 구하시오. (20점)

(2) $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대일 때, $c\mathrm{P}(B|A)$의 값은 $\alpha c^2 + \beta c + \gamma$이다. $2\alpha+\beta+\gamma$의 값을 구하시오. (단, α, β, γ는 유리수이다.)

(20점)

수학(문제 4)

[4] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

이다.

(나) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x) \text{ (단, } a<x<b)$$

이다.

(다) 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 존재할 때,

$$f'(a)=0,\ f''(a)>0$$

이면, $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

두 실수 α, β에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (a) 방정식 $g(x)=0$은 세 실근 1, 3, k를 갖는다.
>
> (b) $\int_1^3 g(x)dx=\alpha$
>
> (c) $\int_1^3 |g(x)|dx=\beta$

다음 물음에 답하시오.

【4-1】 $|\alpha|\neq\beta$일 때, 제시문 (가)를 활용하여 $1<k<3$임을 보이시오. (20점)

【4-2】 제시문 (가), (나), (다)를 활용하여 β의 최솟값을 구하시오. (40점)

【4-3】 $1<k<3$일 때, $\beta=\frac{2}{3}$가 되는 모든 k의 값의 곱은 $p+q\sqrt{2}$이다. 다음 식을 활용하여 $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) (40점)

> $\beta=a+b(k+m)^2+c(k+m)^4$
>
> (단, a, b, c, m은 상수이다.)

경북대학교

2018학년도 수시 논술 답안지

계열	자연계열 I (의예과, 치의예과, 수의예과 제외)
과목	수학
감독자 확인	

수험생 작성란

지원학과 (부, 전공)	
성명	

수험번호

생년월일

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

【유의사항】

1. 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등)를 사용하여야 함
2. 수험번호 및 생년월일을 정확히 기재하여야 함(해당란에 ● 표기)
3. 답안은 반드시 박스 내에 작성하여야 함
4. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 재작성하여야 함
5. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 경우 "0"점 처리함

【문제 1】 반드시 해당문제의 답을 작성해야 함

【1-1】

【1-2】

【1-3】

이 줄 아래에 답안을 작성하거나 낙서할 경우 판독이 불가능하여 채점 불가

【문제 2】 반드시 해당문제의 답을 작성해야 함

【2-1】

【2-2】

【문제 3】 반드시 해당문제의 답을 작성해야 함

【3-1】

【3-2】

이 줄 위에 답안을 작성하거나 낙서할 경우 판독이 불가능하여 채점 불가

【문제 4】 반드시 해당문제의 답을 작성해야 함

【4-1】

【4-2】

【4-3】

이 줄 아래에 답안을 작성하거나 낙서할 경우 판독이 불가능하여 채점 불가

문항카드(수리계열 - 수학)

[문제 1]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술(AAT) 전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호</td><td colspan="2">자연계열1 /[1-1]~[1-3]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>확률과 통계, 미적분Ⅱ</td></tr>
<tr><td>핵심 개념 및 용어</td><td>연속확률변수, 확률밀도함수, 확률, 치환적분법, 부분적분법, 삼각함수의 정적분</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">전체 시험시간 100분 중 25분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

(가) 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이다.

(나) 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[\ f(x)g(x)\ \Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

이다.

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} a\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right| & (-\pi \le x \le \pi) \\ 0 & (x<-\pi,\ x>\pi) \end{cases}$$

일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a는 상수이다.)

【1-1】 상수 a의 값을 구하시오. (30점)

【1-2】 확률 $\mathrm{P}\left(\left|X-\dfrac{\pi}{2}\right| \le \pi\right)$를 구하시오. (20점)

【1-3】 자연수 n에 대하여

$$b_n = \int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\, dx$$

일 때, $\dfrac{b_2}{b_5}$의 값을 구하시오. (50점)

3. 출제 의도

【1-1】 확률밀도함수의 성질을 적용할 수 있는지를 평가한다.
【1-2】 연속확률변수의 확률을 구할 수 있는지를 평가한다.
【1-3】 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 삼각함수를 적분할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[미적분Ⅱ]-(다) 적분법-① 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 Ⅱ]-(3) 적분법-(가) 여러 가지 적분법 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[미적분Ⅱ]-(다) 적분법-① 여러 가지 적분법 ② 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 Ⅱ]-(3) 적분법-(가) 여러 가지 적분법 미적2412. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [1-1]	교육과정	[확률과 통계]-(다) 통계-① 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계]-(3) 통계-(가) 확률분포 확통1311-2. 연속확률변수와 확률밀도함수의 뜻을 안다.
문항 [1-2]	교육과정	[확률과 통계]-(다) 통계-① 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계]-(3) 통계-(가) 확률분포 확통1311-2. 연속확률변수와 확률밀도함수의 뜻을 안다.
문항 [1-3]	교육과정	[미적분Ⅱ]-(다) 적분법-① 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ② 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 Ⅱ]-(3) 적분법-(가) 여러 가지 적분법 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적2412. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적2413-2. 삼각함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

※ 교육과학기술부 고시 제2011-361호[별책 8] "수학과 교육과정" 및 교육과학기술부 발간 "2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학"(교육과학기술부 발간등록번호 11-1341000-002322-01)에 근거

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서 기타	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2017	104-108
	확률과 통계	정상권 외	금성출판사	2017	140-141
	확률과 통계	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	113-114
	미적분 Ⅱ	이준열 외	천재교육	2016	172-174, 176-185
	미적분 Ⅱ	신항균 외	지학사	2016	155-156, 157-163
	미적분 Ⅱ	우정호 외	동아출판	2016	109-111, 183-192

5. 문항 해설

【1-1】 확률밀도함수의 성질을 이용하여 확률밀도함수가 되기 위한 상수를 구하도록 함.
【1-2】 [1-1]에서 구한 상수를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 연속확률변수의 확률을 구하도록 함.
【1-3】 [1-1]에서 구한 상수를 바탕으로 (가)와 (나)에 제시된 치환적분법과 부분적분법을 적용하여 삼각함수의 정적분을 하고 조건을 만족하는 값을 구하도록 함.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
【1-1】	$\mathrm{P}(-\pi \le X \le \pi)=1$에 대한 언급: 10점 (※ 직접적인 언급은 없지만 이후 확률이 1임을 이용하여 상수를 구한 경우는 언급한 것으로 간주함.) $\mathrm{P}\left(-\pi \le X \le \frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}\pi\times\frac{3}{2}\pi a\times\frac{1}{2}$: 5점 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{2} \le X \le \pi\right)=\frac{1}{2}\pi\times\frac{1}{2}\pi a\times\frac{1}{2}$: 5점 (※ $\int_{-\pi}^{\pi}\left\lvert x-\frac{\pi}{2}\right\rvert dx \; \underbrace{=a\left[\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}}_{5점} \; \underbrace{+a\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{\pi}{2}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}}_{5점}$: 10점) $a=\frac{4}{5\pi^2}$: 10점	30
【1-2】	$\mathrm{P}\left(\left\lvert X-\frac{\pi}{2}\right\rvert \le \pi\right) = \mathrm{P}\left(-\frac{\pi}{2} \le \mathrm{X} \le \pi\right)$: 10점 (※ $\mathrm{P}\left(\left\lvert X-\frac{\pi}{2}\right\rvert \le \pi\right)=\frac{4}{5\pi^2}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx\right\}$ 와 같이 $\left(-\frac{\pi}{2} \le X \le \pi\right)$ 이외의 구간에서는 0임을 아는 경우: 10점) $\mathrm{P}\left(\left\lvert X-\frac{\pi}{2}\right\rvert \le \pi\right)=\frac{1}{2}$: 10점	20

【1-3】

1단계) $b_n = n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$: 10점

(※ $b_2 = 2\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 2t\,dt$ (또는 $b_5 = 5\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 5t\,dt$)를 쓴 경우도 10점)

2단계) $$b_n = \frac{4n}{5\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{n}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nt\,dt + \left[\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin nt\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin nt\,dt\right\}$$: 10점

(또는 $$b_n = \frac{4n}{5\pi^2}\left\{\left[\frac{t}{n}\sin nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nt\,dt - \frac{\pi}{2n}\left[\sin nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \left[\frac{t}{n}\sin nt\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin nt\,dt + \frac{\pi}{2n}\left[\sin nt\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$: 10점)

(또는 $$b_2 = \frac{8}{5\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2t\,dt + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{t}\right)\sin 2t\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt\right\}$$: 10점)

(또는 $$b_5 = \frac{4}{\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{5}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin 5t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 5t\,dt + \left[\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin 5t\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{5}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin 5t\,dt\right\}$$: 10점)

(※ $b_n = n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$ 없이 쓴 경우: 20점)

3단계) $b_n = \frac{4n}{5\pi^2}\left\{\frac{2}{n^2}\cos n\pi - \frac{2}{n^2}\cos\frac{n}{2}\pi\right\}$(또는 $= \frac{8}{5\pi^2 n}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n}{2}\pi\right)$)

$b_2 = \frac{8}{5\pi^2}$: 10점

$b_5 = -\frac{8}{25\pi^2}$: 10점

※ [1~3단계 통합]
b_2를 직접 옳게 구한 경우: 20점(**중간 단계: 10점, 별해 3) 참조**)
b_5를 직접 옳게 구한 경우: 20점(**중간 단계: 10점, 별해 3) 참조**))

4단계) $\frac{b_2}{b_5} = -5$: 10점

(※ −5를 구하는 과정이 틀린 경우는 틀린 것으로 간주함.)

50

7. 예시 답안

【1−1】

$$P(-\pi \le X \le \pi) = P\left(-\pi \le X \le \frac{\pi}{2}\right) + P\left(\frac{\pi}{2} \le X \le \pi\right)$$

$$P\left(-\pi \le X \le \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi \times \frac{3}{2}\pi a \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8}\pi^2 a$$

$$P\left(\frac{\pi}{2} \le X \le \pi\right) = \frac{1}{2}\pi \times \frac{1}{2}\pi a \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\pi^2 a$$

따라서 $P(-\pi \le X \le \pi) = \frac{9}{8}\pi^2 a + \frac{1}{8}\pi^2 a = 1$이므로

$a = \frac{4}{5\pi^2}$이다.

별해) $\int_{-\pi}^{\pi} a\left|x - \frac{\pi}{2}\right| dx = a\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx + a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$= a\left[\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + a\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{2}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{9}{8}\pi^2 a + \frac{1}{8}\pi^2 a$$

따라서 $P(-\pi \le X \le \pi) = \frac{9}{8}\pi^2 a + \frac{1}{8}\pi^2 a = 1$이므로

$a = \frac{4}{5\pi^2}$이다.

【1−2】

$$P\left(\left|X - \frac{\pi}{2}\right| \le \pi\right) = P\left(-\frac{\pi}{2} \le X \le \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$= P\left(-\frac{\pi}{2} \le X \le \pi\right)$$

$$= P\left(-\frac{\pi}{2} \le X \le \frac{\pi}{2}\right) + P\left(\frac{\pi}{2} \le X \le \pi\right)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

따라서 $P\left(\left|X - \frac{\pi}{2}\right| \le \pi\right) = \frac{1}{2}$이다.

별해) $P\left(\left|X - \frac{\pi}{2}\right| \le \pi\right) = \int_{-\pi}^{\pi} a\left|x - \frac{\pi}{2}\right| dx$

$$= \frac{4}{5\pi^2}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}$$

【1−3】

$$b_n = \int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x dx$$

$$= n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt$$

$$= \frac{4n}{5\pi^2}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos ntdt - \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos ntdt\right]$$

$$= \frac{4n}{5\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{n}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin ntdt\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin nt\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin ntdt\right\}$$

$$= \frac{4n}{5\pi^2}\left(\frac{2}{n^2}\cos n\pi - \frac{2}{n^2}\cos\frac{n}{2}\pi\right)$$

$$= \frac{8}{5\pi^2 n}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n}{2}\pi\right)$$

따라서 $b_2 = \frac{8}{5\pi^2}$, $b_5 = -\frac{8}{25\pi^2}$ 이므로,

$\frac{b_2}{b_5} = -5$ 이다.

별해 1) $b_n = \int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x dx$

$$= n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt$$

$$= \frac{4n}{5\pi^2}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos ntdt - \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos ntdt\right]$$

$$= \frac{4n}{5\pi^2}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\cos ntdt - \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos ntdt - \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} t\cos ntdt + \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos ntdt\right]$$

$$= \frac{4n}{5\pi^2}\left\{\left[\frac{t}{n}\sin nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin ntdt - \frac{\pi}{2n}\left[\sin nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right.$$

$$\left.-\left[\frac{t}{n}\sin nt\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin ntdt + \frac{\pi}{2n}\left[\sin nt\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$= \frac{4n}{5\pi^2}\left\{-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n}{2}\pi + \frac{1}{n^2}\left[\cos nt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n}{2}\pi\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n}{2}\pi - \frac{1}{n^2}\left[\cos nt\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n}{2}\pi\right\}$$

$$= \frac{4n}{5\pi^2}\left(\frac{2}{n^2}\cos n\pi - \frac{2}{n^2}\cos\frac{n}{2}\pi\right)$$

$$= \frac{8}{5\pi^2 n}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n}{2}\pi\right)$$

따라서 $b_2 = \frac{8}{5\pi^2}$, $b_5 = -\frac{8}{25\pi^2}$ 이므로, $\frac{b_2}{b_5} = -5$ 이다.

별해 2) $b_2=\int_{-2\pi}^{2\pi} f\left(\frac{x}{2}\right)\cos x dx \ =2\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 2t dt$

$$=\frac{8}{5\pi^2}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2t dt-\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2t dt\right]$$

$$=\frac{8}{5\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2t dt\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{t}\right)\sin 2t\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t dt\right\}$$

$$=\frac{8}{5\pi^2}$$

$b_5=\int_{-5\pi}^{5\pi} f\left(\frac{x}{5}\right)\cos x dx \ =5\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 5t dt$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos 5t dt-\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos 5t dt\right]$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{5}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin 5t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 5t dt\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin 5t\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{5}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin 5t dt\right\}$$

$=-\frac{8}{25\pi^2}$ 따라서 $\frac{b_2}{b_5}=-5$이다.

별해 3)

$b_2=\int_{-2\pi}^{2\pi} f\left(\frac{x}{2}\right)\cos x dx$

$=\frac{a}{2}\int_{-2\pi}^{\pi}(\pi-x)\cos x dx+\frac{a}{2}\int_{\pi}^{2\pi}(x-\pi)\cos x dx$: 10점

$=\frac{2}{5\pi^2}\left\{[(\pi-x)\sin x]_{-2\pi}^{\pi}+\int_{-2\pi}^{\pi}\sin x dx \ +[(x-\pi)\sin x]_{\pi}^{2\pi}-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx\right\}$

$=\frac{8}{5\pi^2}$: 10점

$b_5=\int_{-5\pi}^{5\pi} f\left(\frac{x}{5}\right)\cos x dx$

$=\frac{a}{5}\int_{-5\pi}^{\frac{5}{2}\pi}\left(\frac{5}{2}\pi-x\right)\cos x dx+\frac{a}{5}\int_{\frac{5}{2}\pi}^{5\pi}\left(x-\frac{5}{2}\pi\right)\cos x dx$: 10점

$=\frac{4}{25\pi^2}\left\{\left[\left(\frac{5}{2}\pi-x\right)\sin x\right]_{-5\pi}^{\frac{5}{2}\pi}+\int_{-5\pi}^{\frac{5}{2}\pi}\sin x dx \ +\left[\left(x-\frac{5}{2}\pi\right)\sin x\right]_{\frac{5}{2}\pi}^{5\pi}-\int_{\frac{5}{2}\pi}^{5\pi}\sin x dx\right\}$

$=-\frac{8}{25\pi^2}$: 10점

따라서 $\frac{b_2}{b_5}=-5$이다. : 10점

[문제 2]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열Ⅰ / 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하와 벡터
	핵심 개념 및 용어	공간벡터, 벡터의 내적, 평면의 방정식
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는 각각

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right),$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right) \quad (\text{단, } m \neq n)$$

이다.

(나) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$이 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{aligned}$$

이다.

(다) 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (\text{단, } x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2,\ z_1 \neq z_2)$$

이고, $x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2,\ z_1 = z_2$이면 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ z=z_1$$

이다.

(라) 좌표공간에서 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$에 수직이고

점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나는 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

이다.

좌표공간에 네 점 $\mathrm{A}(a,0,0)$, $\mathrm{B}(0,b,0)$, $\mathrm{C}(0,0,1)$, $\mathrm{D}(a,b,1)$이 있다. 점 A에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 P라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, b는 양수이다.)

【2-1】 (1) 점 P의 좌표를 구하시오. (20점)

(2) 평면 ACD와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$를 a와 b에 관한 식으로 나타내시오. (20점)

(3) $ab=3$일 때, 삼각형 ACD의 넓이의 최솟값을 구하시오. (20점)

【2-2】 선분 AD를 $m:n$으로 내분하는 점을 Q라 하자. $a=1$이고 $b=3$일 때, 직선 AC와 평면 BPQ가 만나지 않기 위한 m과 n의 값을 구하시오. (단, m과 n은 서로소인 자연수이다.) (40점)

3. 출제 의도

본 문제는 좌표공간에서 공간도형, 공간좌표에 관한 직선과 평면의 위치관계, 삼수선의 정리, 내분점, 내적, 직선의 방정식, 평면의 방정식을 이해하고 공간도형의 문제해결을 위해 이를 종합적으로 판단할 수 있는지를 평가하고자 한다.

2-1. 좌표공간에서 벡터의 내적, 직선의 방정식, 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

2-2. 좌표공간에서 내분점과 평면의 방정식을 구할 수 있고, 직선과 평면의 위치관계를 파악할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-2. 공간좌표 (3) 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	기벡1323. 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-3. 공간벡터 (2) 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	기벡1332. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
제시문 (다)	교육과정	[기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-3. 공간벡터 (4) 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-3. 공간벡터 기벡1333. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (라)	교육과정	[기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-3. 공간벡터 (5) 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-3. 공간벡터 기벡1334. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면의 방정식과 구의 방정식을 구할 수 있다.
문제 2-1	교육과정	[기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-3. 공간벡터 (4) 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다. [기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-3. 공간벡터 (2) 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. [기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-1. 공간도형 (2)삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (3)정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	기벡1333. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다. 기벡1332. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 기벡1312. 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 기벡1313. 정사영의 뜻을 알고, 정사영의 길이와 넓이를 구할 수 있다.
문제 2-2	교육과정	[기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-2. 공간좌표 (3) 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다. [기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-3. 공간벡터 (2) 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다 [기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-3. 공간벡터 (4) 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다. [기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-3. 공간벡터 (5) 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다. [기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-1. 공간도형 (1) 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.
	성취기준·성취수준	기벡1323. 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다. 기벡1332. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. [기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-3. 공간벡터 기벡1333. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다. [기하와 벡터]-Ⅲ. 공간도형과 공간벡터-3. 공간벡터 기벡1334. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면의 방정식과 구의 방정식을 구할 수 있다. 기벡1311. 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.

※ 교육과학기술부 고시 제2011-361호[별책 8] “수학과 교육과정” 및 교육과학기술부 발간 “2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학”(교육과학기술부 발간등록번호 11-1341000-002322-01)에 근거

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2014	142-160, 168-179, 188-213
	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2014	176-190

5. 문항 해설

좌표공간에서 직선과 평면은 많은 분야에 응용이 가능한 가장 기본적인 도구이다. 본 문항의 핵심적인 내용은 「기하와 벡터」의 '공간도형과 공간벡터' 단원에서 다루어진다. 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 벡터의 내분점, 내적, 삼수선의 정리, 직선의 방정식, 평면의 방정식을 잘 이해하고 직선과 평면의 위치관계를 파악할 수 있는지, 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	(1) 직선의 방정식을 구한다.	5
	(1) 선분 AP와 선분 CD의 수직조건을 이용한다.	10
	(1) 점 P의 좌표를 구한다.	5
	(2) 삼각형의 면적을 구한다	10
	(2) 정사영을 이용하여 $\cos\theta$를 구한다.	10
	(3) 삼각형 ACD의 면적을 구한다.	10
	(3) 산술기하평균을 이용하여 최솟값을 구한다.	10
2-2	평면의 방정식을 구한다.	20
	직선의 방정식을 구한다.	5
	평면의 법선벡터와 직선의 방향벡터가 수직인 조건으로부터 m, n의 값을 구한다.	10
	평면과 직선이 만나지 않음을 보인다.	5

7. 예시 답안

[2-1] (60점)

❍ **모범답안:** (1) 점 P의 좌표를 (x, y, z)로 놓자.

직선 CD의 방정식은 $\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}$, $Z=1$이고 점 P는 선분 CD위에 있으므로

$ay=bx,\ z=1$ ----㉠

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 내적은 0이 되므로

$a(x-a)+by=0$ ----㉡

㉠과 ㉡을 연립하면, $x=\dfrac{a^3}{a^2+b^2}$, $y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}, z=1$

따라서 $\mathrm{P}\left(\dfrac{a^3}{a^2+b^2}, \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}, 1\right)$이다.

❍ **채점기준:** 직선 CD의 방정식 ㉠을 구한다. (5점)
선분 AP와 선분 CD의 수직조건으로부터 ㉡을 구한다. (10점)
㉠과 ㉡을 연립하여 점 P의 좌표를 구한다. (5점)

(2) 삼각형 ACD의 넓이를 S라 할 때, 선분 AP의 길이를 삼수선의 정리 또는 두 점 사이의 거리를 이용하여 구하면,

$\mathrm{S}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{1+\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}$ 이다.

삼각형 ACD의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}\cos\theta=\dfrac{1}{2}ab$이다.

따라서 $\cos\theta=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}}$ 이다.

(별해) 두 평면의 법선벡터를 구하고 그 내적을 이용하여 $\cos\theta$를 구할 수 있음.

❍ **채점기준:** 삼각형 ACD의 넓이을 구한다 (10점)
정사영을 이용하여 $\cos\theta$를 구한다. (10점)

(3) 삼각형 ACD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}$ 이다. $ab=3$이면 산술기하평균에 의해

$a^2+b^2\geq 2ab=6$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다).

따라서 넓이의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

❍ **채점기준:** 삼각형 ACD의 넓이을 구한다 (10점)
산술기하평균을 이용하여 최솟값을 구한다. (10점)

[2-2] (40점)

❍ **모범답안:** $a=1$, $b=3$일 때, 점 B의 좌표는 $(0,3,0)$, 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{10}, \dfrac{3}{10}, 1\right)$이고

점 Q의 좌표는 $\left(1, \dfrac{3m}{m+n}, \dfrac{m}{m+n}\right)$이다.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\dfrac{1}{10}, -\dfrac{27}{10}, 1\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\left(1, \dfrac{-3n}{m+n}, \dfrac{m}{m+n}\right)$에 수직인 벡터를 $\vec{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$로 놓으면,

$\dfrac{\alpha}{10}-\dfrac{27}{10}\beta+\gamma=0$ ----㉠

$\alpha-\dfrac{3n}{m+n}\beta+\dfrac{m}{m+n}\gamma=0$ ----㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 평면 BPQ의 법선벡터 $\vec{n}$을 구하면, $\vec{n}=\left(\dfrac{-27m+30n}{9m+10n}, 1, \dfrac{27m+24n}{9m+10n}\right)$

(평면의 방정식을 $\alpha x+\beta y+\gamma z+1=0$으로 놓고 평면의 방정식을 구할 수도 있음.)
직선 AC의 방정식은 $-x=z-1, y=0$ 이고 방향벡터는 $(-1,0,1)$이다.
직선과 평면이 만나지 않기 위해서는 평면의 법선벡터와 직선의 방향벡터가 수직이어야 하므로 $27m-30n+27m+24n=0$이다.

따라서 $m:n=1:9$이므로 $m=1, n=9$이다.

이때, 평면의 방정식은 $27x+11y+27z-33=0$이므로 $y=0$에서 $x+z=\dfrac{11}{9}$이 되어 직선 AC와 만나지 않는다.

(별해)

점 P는 선분 CD를 $a^2:b^2$의 비로 내분하는 점이므로 직선 AC와 직선 PQ가 평행하기 위한 내분점 Q의 비는 $a=1, b=3$일 때 1:9가 된다. 이때, 평면 ACD와 점 B가 한 평면 위에 존재하지 않기 때문에 직선 AC와 평면 BPQ는 만나지 않는다.

❍ **채점기준:** 평면 BPQ의 법선벡터 또는 평면의 방정식을 구한다. (20점)
직선 AC의 방정식을 구한다. (5점)
평면의 법선벡터와 직선의 방향벡터가 수직조건으로부터 m, n의 값을 구한다. (10점)
평면과 직선이 만나지 않음을 보인다. (5점)

[문제 3]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열1 / 수학 1-3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	순열, 조합, 확률, 조건부확률
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) (1) 서로 다른 n개에서 $r\,(0 < r \leq n)$개를 택하는 순열의 수는

$$_{n}\mathrm{P}_{r} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

이다.

(2) 서로 다른 n개에서 $r\,(0 \leq r \leq n)$개를 택하는 조합의 수는 $_{n}\mathrm{C}_{r} = \dfrac{_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ 이다. 단, $_{n}\mathrm{C}_{0} = 1$이다.

(3) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는 $_{n}\Pi_{r} = n^{r}$이다.

(나) (1) 어떤 시행에서 원소가 유한개인 표본공간 S에 대하여 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

로 정의한다. (단, $n(A)$는 사건 A의 원소의 개수이다.)

(2) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

가 성립한다. $A \cup B$는 A 또는 B가 일어나는 사건이고, $A \cap B$는 A와 B가 동시에 일어나는 사건이다.

(3) 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났다는 조건 아래에서 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호 $\mathrm{P}(B|A)$로 나타내며 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) \neq 0)$$

[문항]

【3-1】 1부터 4까지의 자연수가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 세 학생 A, B, C가 순서대로 상자에서 공을 한 개씩 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 상자에 넣는 시행을 하려고 한다. 세 학생 A, B, C가 공을 꺼내는 경우의 수와 각 학생이 서로 다른 숫자가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수를 각각 구하시오. (20점)

(2) 상자에 들어 있는 4개의 공을 꺼내어 세 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 단, 한 개의 공도 받지 못하는 학생이 있을 수 있고, 세 학생 A, B, C가 각 공을 받을 확률은 모두 같다. 세 학생 A, B, C 모두 적어도 한 개의 공을 받을 확률을 구하시오. (20점)

(3) 【3-1】 (2)에서 세 학생 A, B, C 모두 적어도 한 개의 공을 받았다고 할 때, 학생 A가 받은 공에 적힌 수가 모두 짝수일 확률을 구하시오. (20점)

【3-2】 두 사건 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(a) $\frac{1}{2} < \mathrm{P}(A) < 1$, $0 < \mathrm{P}(B) < 1$

(b) $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A|B)$

$\mathrm{P}(A) = c$ 일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\mathrm{P}(B) = p$일 때 $\mathrm{P}(A \cup B)$가 최댓값 q를 가진다. $p + \sqrt{q}$의 값을 구하시오. (20점)

(2) $\mathrm{P}(A \cup B)$가 최대일 때, $c\mathrm{P}(B|A)$의 값은 $\alpha c^2 + \beta c + \gamma$이다. $2\alpha + \beta + \gamma$의 값을 구하시오. (단, α, β, γ는 유리수이다.) (20점)

3. 출제 의도

본 문제는 순열과 조합을 활용하여 확률을 구하고, 확률의 기본법칙과 조건부확률을 이해하고 있는지를 평가하고자 한다.

3-1 순열, 중복순열 그리고 조합의 뜻을 이해하고 이를 이용하여 주어진 상황에 대한 경우의 수를 구할 수 있다. 또한 그 경우의 수를 이용하여 주어진 사건에 대한 확률을 구할 수 있는지 평가하고자 한다.
3-2 확률의 의미와 그 기본 성질 그리고 조건부 확률을 이해하고 이를 활용하여 다양한확률을 구할 있는지 평가하고자 한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ①경우의 수, ②순열과 조합
	성취기준·성취수준	1. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 2. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 3. 중복순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
제시문2	교육과정	[확률과 통계] - (나) 확률 - ①확률의 뜻과 활용, ②조건부확률
	성취기준·성취수준	1. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다. 2. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 3. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문항3-1 (1)	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ①경우의 수, ②순열과 조합
	성취기준·성취수준	1. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 2. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 3. 중복순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
문항3-1 (2)	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ①경우의 수, ②순열과 조합 [확률과 통계] - (나) 확률 - ①확률의 뜻과 활용, ②조건부확률
	성취기준·성취수준	1. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 2. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 3. 중복순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있다. 4. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다.
문항3-1 (3)	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ①경우의 수, ②순열과 조합 [확률과 통계] - (나) 확률 - ①확률의 뜻과 활용, ②조건부확률
	성취기준·성취수준	1. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. 2. 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. 3. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다. 4. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문항3-2 (1)	교육과정	[확률과 통계] - (나) 확률 - ①확률의 뜻과 활용, ②조건부확률
	성취기준·성취수준	1. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 2. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문항3-2 (2)	교육과정	[확률과 통계] - (나) 확률 - ①확률의 뜻과 활용, ②조건부확률
	성취기준·성취수준	1. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다. 2. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 3. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

※ 교육과학기술부 고시 제2011-361호[별책 8] “수학과 교육과정” 및 교육과학기술부 발간 “2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학”(교육과학기술부 발간등록번호 11-1341000-002322-01)에 근거

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	우정호 외 24명	동아출판	2014	10-67 94-125
	확률과 통계	신항균 외 11명	지학사	2014	12-35 62-85
	확률과 통계	류희찬 외 17명	천재교과서	2014	12-42 78-103
	확률과 통계	황선욱 외 10명	좋은책 신사고	2014	12-34 62-81

5. 문항 해설

3-1 (1) 문항은 순열과 중복순열을 이해하고 이를 이용하여 사건의 경우의 수를 구할 수 있는지 알아보는 문제이다. 그리고 (2) 문항은 중복순열과 조합을 이용하여 사건의 경우의 수를 구하고 이를 이용하여 확률을 구할 수 있는지 알아보는 문제이다. (3) 문항은 순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구하고 이를 이용하여 원하는 조건부확률을 구할 수 있는지 알아보는 문제이다.

3-2 (1) 문항은 확률의 기본성질인 덧셈정리 등과 조건부확률의 뜻을 이해하고 이를 이용하여 합사건의 확률이 최대가 될 때의 조건을 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다. (2) 문항은 조건부확률의 성질을 이용하여 원하는 확률을 구할 수 있는지 알아보는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1 (1)	1. 학생 A,B,C가 공을 꺼내는 경우의 수를 구하면 10점 2. 각 학생이 서로 다른 공을 꺼내는 경우의 수를 구하면 10점	20
3-1 (2)	1. 4개의 공을 세 학생 A, B, C에게 임의로 나누어 주는 경우의 수를 구하면 5점 2. 모든 학생이 적어도 한 개의 공을 받을 경우의 수를 구하면 각 10점 3. 모든 학생이 적어도 한 개의 공을 가질 확률을 구하면 5점	20
3-1 (3)	1. 조건에 해당하는 경우의 수를 구하였을 경우 10점 2. 조건부확률을 구하면 10점	20
3-2 (1)	1. 주어진 관계식을 이용하여 p와 q를 구하면 각각 5점 2. $p+\sqrt{q}$의 값을 구하면 10점	20
3-2 (2)	1. 주어진 관계식을 이용하여 α, β, γ의 값을 구하면 각각 5점 2. $2\alpha+\beta+\gamma$를 구하면 5점	20

7. 예시 답안

[3-1]

(1) 세 학생 A,B,C가 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 상자에 넣는 시행을 순서대로 한 번씩 하였을 때 세 학생 A,B,C가 공을 꺼내는 경우의 수는 $\underline{{}_4\Pi_3 = 4^3 = 64}$이고, 각 학생이 서로 다른 숫자가 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는 $\underline{{}_4\mathrm{P}_3 = {}_4\mathrm{C}_3 \times 3! = 24}$이다.

(2) 4개의 공을 세 학생 A,B,C에게 임의로 나누어 주는 경우의 수는 $\underline{{}_3\Pi_4 = 3^4 = 81}$이고, 이 중 모든 학생이 적어도 한 개의 공을 받을 경우의 수는 $\underline{\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_2}{2!} \times 3! = 36}$이다. 따라서 모든 학생이 적어도 한 개의 공을 받을 확률은 $\underline{\dfrac{36}{81}}$ 즉 $\underline{\dfrac{4}{9}}$이다.

(3) 모든 학생이 적어도 한 개의 공을 받았다는 조건 하에서 학생 A가 받은 공이 모두 짝수일 경우는
(i) 학생 A가 2와 4가 적힌 공을 받은 경우의 수: 2
(ii) 학생 A가 2가 적힌 공만을 받은 경우의 수: 6
(iii) 학생 A가 4가 적힌 공만을 받은 경우의 수: 6
이므로 총 14가지이다. 따라서 모든 학생이 적어도 한 개의 공을 받았다는 조건 하에서 A학생이 받은 공에 적힌 수가 모두 짝수일 확률은 $\underline{\dfrac{14}{36}}$ 즉 $\underline{\dfrac{7}{18}}$이다.

[3-2]

(1) 주어진 조건으로부터 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B) = \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ 이고
$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로
$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(B)\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}$ 이다. $\mathrm{P}(A)=c$라고 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B) &= c+\mathrm{P}(B)-c\mathrm{P}(B)-\{\mathrm{P}(B)\}^2 = -\left\{\mathrm{P}(B)-\frac{1-c}{2}\right\}^2+c+\frac{(1-c)^2}{4}\\ &= -\left\{\mathrm{P}(B)-\frac{1-c}{2}\right\}^2+\frac{(1+c)^2}{4}\end{aligned}$$

이다. 따라서, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1-c}{2}$일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 최댓값은 $\dfrac{(1+c)^2}{4}$이므로

$$p+\sqrt{q} = \frac{1-c}{2}+\sqrt{\frac{(1+c)^2}{4}} = \frac{1-c}{2}+\frac{1+c}{2} = 1$$
이다.

(2) 주어진 조건으로부터

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\left(c+\frac{1-c}{2}\right)\frac{1-c}{2}}{c} = \frac{\left(\frac{1+c}{2}\right)\frac{1-c}{2}}{c}$$

이므로 $c\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{1-c^2}{4}$이다. 따라서 $\alpha=-\dfrac{1}{4}$, $\beta=0$, $\gamma=\dfrac{1}{4}$이고 $2\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{1}{4}$이다.

[문제 4]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열1 / 수학 1-4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 I, 미적분 II
	핵심 개념 및 용어	다항함수, 미분, 적분, 곡선의 개형
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 25분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

이다.

(나) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x) \ \text{(단, } a<x<b\text{)}$$

이다.

(다) 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 존재할 때,

$$f'(a)=0,\ f''(a)>0$$

이면, $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

[문항]

두 실수 α, β에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(a) 방정식 $g(x)=0$은 세 실근 1, 3, k를 갖는다.

(b) $\int_1^3 g(x)dx=\alpha$

(c) $\int_1^3 |g(x)|dx=\beta$

다음 물음에 답하시오.

【4-1】 $|\alpha| \neq \beta$일 때, 제시문 (가)를 활용하여 $1 < k < 3$임을 보이시오. (20점)

【4-2】 제시문 (가), (나), (다)를 활용하여 β의 최솟값을 구하시오. (40점)

【4-3】 $1 < k < 3$일 때, $\beta = \frac{2}{3}$가 되는 모든 k의 값의 곱은 $p + q\sqrt{2}$이다. 다음 식을 활용하여 $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) (40점)

$$\beta = a + b(k+m)^2 + c(k+m)^4$$

(단, a, b, c, m은 상수이다.)

3. 출제 의도

본 문제는 사차함수의 곡선의 개형에 관한 기본적인 내용을 평가하고자 한다. 구체적으로 삼차함수에 대한 정적분 형태로 주어지는 사차함수의 성질을 파악할 수 있는지를 평가하고자 한다. 특히, 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 개념 및 미분과 적분의 관계를 활용하여 다음의 사항들을 평가하고자 한다.

[4-1] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 개념을 이해하고 이를 활용하여 삼차방정식의 근의 위치를 파악할 수 있는지를 평가한다.

[4-2] 함수의 그래프의 개형을 알기 위하여 이계도함수를 활용할 수 있는지를 평가한다.

[4-3] 미분과 적분의 관계와 이계도함수를 활용하여 삼차함수의 정적분으로 주어진 사차함수와 직선이 만나는 교점의 x좌표를 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가)	교육과정	[미적분 II] – (라) 적분법 $\boxed{2}$ 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] – (4) 적분법 (나) 정적분의 활용 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
제시문 (나)	교육과정	[미적분 I] – (라) 다항함수의 적분법 $\boxed{2}$ 정적분 ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 I] – (4) 다항함수의 적분법 (나) 정적분 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
제시문 (다)	교육과정	[미적분 II] – (다) 미분법 $\boxed{1}$ 여러 가지 미분법 ④ 이계도함수를 구할 수 있다. [미적분 II] – (다) 미분법 $\boxed{2}$ 도함수의 활용 ② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] – (3) 미분법 (가) 여러 가지 미분법 미적2314. 이계도함수를 구할 수 있다. [미적분 II] – (3) 미분법 (나) 도함수의 활용 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문항4-1	교육과정	[미적분 II] – (라) 적분법 $\boxed{2}$ 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] – (4) 적분법 (나) 정적분의 활용 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항4-2	교육과정	[미적분 II] – (라) 적분법 $\boxed{2}$ 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [미적분 I] – (라) 다항함수의 적분법 $\boxed{2}$ 정적분 ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다. [미적분 II] – (다) 미분법 $\boxed{1}$ 여러 가지 미분법 ④ 이계도함수를 구할 수 있다. [미적분 II] – (다) 미분법 $\boxed{2}$ 도함수의 활용 ② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] – (4) 적분법 (나) 정적분의 활용 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [미적분 I] – (4) 다항함수의 적분법 (나) 정적분 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다. [미적분 II] – (3) 미분법 (가) 여러 가지 미분법 미적2314. 이계도함수를 구할 수 있다. [미적분 II] – (3) 미분법 (나) 도함수의 활용 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문항4-3	교육과정	[미적분 II] – (라) 적분법 $\boxed{2}$ 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [미적분 I] – (라) 다항함수의 적분법 $\boxed{2}$ 정적분 ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분 II] – (4) 적분법 (나) 정적분의 활용 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [미적분 I] – (4) 다항함수의 적분법 (나) 정적분 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

※ 교육과학기술부 고시 제2011-361호[별책 8] “수학과 교육과정” 및 교육과학기술부 발간 “2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학”(교육과학기술부 발간등록번호 11-1341000-002322-01)에 근거

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 I	이강섭 외	미래엔	2014	165-166
	미적분 II	이강섭 외	미래엔	2016	177-181
	미적분 II	우정호 외	동아출판사	2016	154-159

5. 문항 해설

미분과 적분은 자연과학, 공학 및 사회과학에 이르기까지 광범위한 분야에서 널리 활용되어지는 가장 기본적인 수학적 도구 중 하나이다. 본 문제의 핵심적인 내용은 「미적분 I」와 「미적분 II」의 정적분의 활용과 도함수의 활용 단원에서 다루어진다. 따라서 본 문제을 통해 학생들이 제시문을 읽고 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 개념을 이해하고 삼차방정식의 근의 위치를 파악할 수 있는지, 미분과 적분의 관계와 이계도함수의 성질을 이용하여 삼차함수의 정적분으로 주어진 사차함수의 최솟값을 구할 수 있는지, 미분과 적분의 관계를 이용하여 삼차함수의 정적분으로 주어진 사차함수와 직선이 만나는 해를 구할 수 있는지, 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지 등을 종합적으로 평가하고자 한다. 구체적으로 각 소문항에서 다음을 평가하고자 한다.

[4-1] 본 문항은 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 개념을 이해하고 이를 활용하여 삼차방정식의 근의 위치를 파악할 수 있는지를 평가한다.
[4-2] 본 문항은 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 개념, 미분과 적분의 관계 및 이계도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지를 종합적으로 평가한다.
[4-3] 본 문항은 미분과 적분의 관계 및 이계도함수를 활용하여 삼차함수의 정적분으로 주어진 사차함수와 직선이 만나는 교점의 x좌표를 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[4-1]	$1<k<3$을 만족하지 않는 k에 대하여 함수 $g(x)$는 (a) $k \le 1$인 경우 $g(x) \le 0 \quad (1<x<3)$ (b) $k \ge 3$인 경우 $g(x) \ge 0 \quad (1<x<3)$ 이다.	10점
	따라서 제시문 (가)에 의하여 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 (a)와 (b) 두 가지 경우 모두 $\beta=\int_1^3 \lvert g(x)\rvert dx=\left\lvert \int_1^3 g(x)dx \right\rvert=\lvert\alpha\rvert$ 이다. 이는 조건 $\lvert\alpha\rvert \ne \beta$를 만족하지 않는다. 그러므로 $1<k<3$이다.	10점
[4-2]	$h(x)=(x-1)(x-3)$이라 하면 조건으로부터 삼차함수 $g(x)$는 $g(x)=(x-1)(x-3)(x-k)=xh(x)-kh(x)$ 이다. 제시문 (가)에 의하여	5점

	$\beta=\begin{cases} k\int_1^3 h(x)dx-\int_1^3 xh(x)dx & (k<1) \\ \int_1^k xh(x)dx-k\int_1^k h(x)dx-\int_k^3 xh(x)dx+k\int_k^3 h(x)dx & (1\le k\le 3) \\ -k\int_1^3 h(x)dx+\int_1^3 xh(x)dx & (k>3) \end{cases}$ 이다.	
	$\int_1^3 h(x)dx<0$이고 $\int_1^3 xh(x)dx<0$이므로 구간 $(-\infty, 1)$에서 β는 감소하고 구간 $(3, \infty)$에서 β는 증가한다.	5점
	$1\le k\le 3$인 경우, 제시문 (나)에 의하여 $\frac{d\beta}{dk}=-\int_1^k h(x)dx+\int_k^3 h(x)dx$ 이다. 함수 $h(x)$는 직선 $x=2$를 대칭축으로 하는 이차함수이므로 $k=2$일 때, $\frac{d\beta}{dk}=0$ 이다.	10점
	또한, k에 대하여 β의 이계도함수를 구하면 $\frac{d^2\beta}{dk^2}=-2(k-1)(k-3)>0 \quad (1<k<3)$ 이다. 따라서 제시문 (다)에 의하여 β는 구간 (1,3)에서 아래로 볼록하고 $k=2$에서 극소이다. 그러므로 β는 $k=2$일 때, 최솟값을 가진다.	10점
	$k=2$일 때, β를 계산하면 $\beta=2\int_1^2(x^3-6x^2+11x-6)dx$ $=2\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_1^2$ $=\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 β의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.	10점
[4-3]	$1<k<3$이므로, [4−2]의 풀이에 의하여 β는 k에 대한 사차함수이고 $\beta(2)=\frac{1}{2}$, $\beta'(2)=0$이므로 $m=-2$이라 두면 주어진 공식으로부터 $\beta=\int_1^k xh(x)dx-k\int_1^k h(x)dx-\int_k^3 xh(x)dx+k\int_k^3 h(x)dx$ ---- (a) $=\frac{1}{2}+b(k-2)^2+c(k-2)^4 \quad (a=\frac{1}{2})$ 과 같이 둘 수 있다.	15점
	식 (a)의 양변을 미분하면 $\int_k^3 h(x)dx-\int_1^k h(x)dx=2b(k-2)+4c(k-2)^3$ ----- (b)	15점

	(b)의 양변을 미분하면 $-2(k-1)(k-3)=2b+12c(k-2)^2$ ------ (c) (c)의 양변을 미분하면 $-4(k-2)=24c(k-2)$ -------- (d) 이다. (c)에 $k=2$를 대입하여 풀면 $b=1$ 이다. (d)로부터 $c=-\frac{1}{6}$ 이다.	

7. 예시 답안

[4-1]
$1<k<3$을 만족하지 않는 k에 대하여 함수 $g(x)$는
(a) $k \le 1$인 경우 $g(x) \le 0 \quad (1<x<3)$
(b) $k \ge 3$인 경우 $g(x) \ge 0 \quad (1<x<3)$
이다.
따라서 제시문 (가)에 의하여 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 (a)와 (b) 두 가지 경우 모두

$$\beta=\int_1^3 |g(x)|dx=\left|\int_1^3 g(x)dx\right|=|\alpha|$$

이다. 이는 조건 $|\alpha| \ne \beta$를 만족하지 않는다. 그러므로 $1<k<3$이다.

[4-2]
$h(x)=(x-1)(x-3)$이라 하면 조건으로부터 삼차함수 $g(x)$는

$$g(x)=(x-1)(x-3)(x-k)=xh(x)-kh(x)$$

이다. 제시문 (가)에 의하여

$$\beta=\begin{cases} k\int_1^3 h(x)dx-\int_1^3 xh(x)dx & (k<1) \\ \int_1^k xh(x)dx-k\int_1^k h(x)dx-\int_k^3 xh(x)dx+k\int_k^3 h(x)dx & (1 \le k \le 3) \\ -k\int_1^3 h(x)dx+\int_1^3 xh(x)dx & (k>3) \end{cases}$$

이다.

(i) $\int_1^3 h(x)dx<0$이고 $\int_1^3 xh(x)dx<0$이므로 구간 $(-\infty, 1)$에서 β는 감소하고 구간 $(3, \infty)$에서 β는 증가한다.

(ii) $1 \le k \le 3$인 경우, 제시문 (나)에 의하여

$$\frac{d\beta}{dk}=-\int_1^k h(x)dx+\int_k^3 h(x)dx$$

이다. 함수 $h(x)$는 직선 $x=2$를 대칭축으로 하는 이차함수이므로

$$k=2\text{일 때, } \frac{d\beta}{dk}=0$$

이다. 또한, k에 대하여 β의 이계도함수를 구하면

$$\frac{d^2\beta}{dk^2} = -2(k-1)(k-3) > 0 \quad (1 < k < 3)$$

이다. 따라서 제시문 (다)에 의하여 β는 구간 (1,3)에서 아래로 볼록하고 $k=2$에서 극소이다.
그러므로 (i)과 (ii)를 종합해보면 β는 $k=2$일 때, 최솟값을 가진다. 한편, $k=2$일 때, β를 계산하면

$$\begin{aligned}\beta &= 2\int_1^2 (x^3-6x^2+11x-6)dx \\ &= 2\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{11}{2}x^2 - 6x\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이다. 따라서 β의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

[4-3]

$1 < k < 3$이므로, [4-2]의 풀이에 의하여 β는 k에 대한 사차함수이고 $\beta(2) = \frac{1}{2}$, $\beta'(2) = 0$이므로 $m = -2$이라 두면 주어진 공식으로부터

$\beta = \int_1^k xh(x)dx - k\int_1^k h(x)dx - \int_k^3 xh(x)dx + k\int_k^3 h(x)dx$ ---- (a)

$= \frac{1}{2} + b(k-2)^2 + c(k-2)^4 \quad (a = \frac{1}{2})$

과 같이 둘 수 있다.
식 (a)의 양변을 미분하면

$\int_k^3 h(x)dx - \int_1^k h(x)dx = 2b(k-2) + 4c(k-2)^3$ ----- (b)

(b)의 양변을 미분하면

$-2(k-1)(k-3) = 2b + 12c(k-2)^2$ ----- (c)

(c)의 양변을 미분하면

$-4(k-2) = 24c(k-2)$ ------- (d)

이다. (c)에 $k=2$를 대입하여 풀면

$$b = 1$$

이다. (d)로부터

$$c = -\frac{1}{6}$$

이다. 그러므로 $\beta = \frac{2}{3}$를 만족하는 k는 사차방정식

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + (k-2)^2 - \frac{1}{6}(k-2)^4$$

의 근이다. $X = (k-2)^2$이라 두고 위의 사차방정식을 정리하면

$$X^2 - 6X + 1 = 0$$

이 된다. $1 < k < 3$이므로 $0 < X < 1$이다. 따라서 $X^2 - 6X + 1 = 0$의 근은

$$X = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2 > 0$$

이다.

$$\begin{gathered}(k-2)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \\ k^2 - 4k + 1 + 2\sqrt{2} = 0\end{gathered}$$

이므로 근과 계수의 관계에 의해 k의 모든 값의 곱은 $1 + 2\sqrt{2}$이다.
$p = 1$, $q = 2$이므로 정답은 3이다.

(별해)

$1<k<3$이므로, β를 계산하면

$\beta=\int_1^k xh(x)dx-k\int_1^k h(x)dx-\int_k^3 xh(x)dx+k\int_k^3 h(x)dx$

$=-\frac{1}{6}(k^4-8k^3+18k^2-8k+1)+2$

이다. $\beta=\frac{2}{3}$의 식을 풀기 위하여 β의 식을 변형하면

$\beta=-\frac{k^2}{6}\left\{k^2+\frac{1}{k^2}-8\left(k+\frac{1}{k}\right)+18\right\}+2$

$=-\frac{k^2}{6}\left\{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2-8\left(k+\frac{1}{k}\right)+16\right\}+2$

$=-\frac{k^2}{6}\left(k+\frac{1}{k}-4\right)^2+2$

이다. 따라서 $\beta=\frac{2}{3}$가 되게 하는 k는 사차방정식

$$\begin{aligned}8&=(k^2-4k+1)^4\\&=\left((k-2)^2-3\right)^2\end{aligned}$$

의 근이다. $X=(k-2)^2$이라 두면, $1<k<3$이므로 $0<X<1$이다. 따라서

$$X=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2>0$$

이다.

$$\begin{aligned}(k-2)^2&=3-2\sqrt{2}\\k^2-4k+1+2\sqrt{2}&=0\end{aligned}$$

이므로 근과 계수의 관계에 의해 k의 모든 값의 곱은 $1+2\sqrt{2}$이다. $p=1$, $q=2$이므로 정답은 3이다.