2018학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열 I 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

시 험 시 간	100분	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		印
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열I 문제지와 자연계열I 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 제외하고 4쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 수학 2매(4쪽)로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, <u>반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것</u>(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문 제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

표본공간 S의 임의의 사건 A에 대하여, 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$로 정의하면, $\varnothing \subset A \subset S$이므로 다음이 성립한다 (단, $n(A)$는 사건 A의 원소의 개수이다).

(1) 임의의 사건 A에 대하여, $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$이고 사건 A에 대한 여사건 A^c의 확률은 $\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)$이다.

(2) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

이고 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)$$

이다.

(나)

이산확률변수 X가 x_i의 값을 가질 확률을 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$라고 할 때, $x_1, x_2, \cdots, x_n$과 확률 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 사이의 대응 관계를 확률변수 X의 확률분포라고 한다. 이때 이산확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$과 분산 $\mathrm{V}(X)$은 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)=\sum_{x=1}^{n} x_i p_i$$

$$\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i \ \ (\text{단, } m=\mathrm{E}(X))$$

(다)

1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것을 n의 계승이라고 하며, 기호로 $n!$과 같이 나타낸다. 즉,

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$$

이다.

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{r!(n-r)!} \ \ (\text{단, } 0 \le r \le n)$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】

(가)를 이용하여 다음의 물음에 답하시오.

(1) 2개의 주머니에는 각각 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 남색, 보라색을 가지는 7개의 공이 들어있다고 하자. 각 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 4개의 공 중에서 같은 색깔의 공이 있을 확률을 구하시오. (15점)

(2) 두 사건 A, B가 서로 독립이고, $\mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B^c)=\dfrac{1}{6}$일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값을 구하시오. (15점)

【1-2】

완치율이 p인 새로운 수술법을 적용하여 3명의 환자를 수술하였을 때, 완치되는 환자의 수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

(1) $(b+c)-(a+d)\ge \dfrac{1}{8}$를 만족하는 p의 범위를 구하시오. (15점)

(2) (나)를 이용하여 분산 $\mathrm{V}(X)$가 최대일 때의 p를 구하고 그 때의 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(X)$의 값을 구하시오. (15점)

【1-3】

다음 두 조건을 만족시키는 자연수 m을 원소로 갖는 집합을 A라 하자.

[조건 1] $2 \le m \le 10$

[조건 2] $(m-1)!$이 m으로 나누어떨어지지 않는다.

다음의 물음에 답하시오.

(1) 집합 A를 원소나열법으로 나타내시오. (20점)

(2) 2이상의 자연수 n에 대해 ${}_n\mathrm{C}_k\ (1 \le k \le n-1)$가 n의 배수가 되는 자연수 k의 개수를 x_n이라 하자. 집합 $B=\{x_n \mid n\in A\}$라 할 때, B의 모든 원소의 합을 구하시오. (20점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

(1) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = a + (n-1)d$$

이다.

(2) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은

$$S_n = \frac{n(a+a_n)}{2} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

이다.

(나)

지수함수 $f(x) = a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a$$

이다.

(다)

함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 구간 (a,b)에서 미분가능할 때, 다음이 성립한다.

(1) (a,b)에서 $f'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 구간 $[a,b]$에서 증가한다.

(2) (a,b)에서 $f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$는 구간 $[a,b]$에서 감소한다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【2-1】

첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 어떤 자연수 k에 대하여

$$a_k = 8,\quad S_k = 215$$

일 때, (가)를 이용하여 다음 물음에 답하시오.

(1) k의 값을 구하시오. (15점)

(2) a_5의 값을 구하시오. (15점)

(3) $a_n + S_n$의 최댓값을 구하시오. (20점)

【2-2】

실수 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를

$$f(x) = 4^x + 8,\quad g(x) = k \cdot 2^x$$

라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $\alpha = \log_2 3$일 때, 점 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$에서 만난다. k의 값을 구하시오. (20점)

(2) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $k>k_0$이다. (나)와 (다)를 이용하여 k_0의 값을 구하시오. (30점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

좌표공간에서 x축, y축, z축의 양의 방향에 있으면서 크기가 1인 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$이라고 하자. 이때 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$을 성분으로 나타내면

$$\overrightarrow{e_1}=(1,0,0),\quad \overrightarrow{e_2}=(0,1,0),\quad \overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$$

이고 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$은 단위벡터이다. 따라서 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$은

$$\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}$$

과 같이 나타낼 수 있다.

(나)

두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$에 대하여 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

이다.

(다)

두 점 $\mathrm{A}(x_1,\,y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\,y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

이다.

(라)

점 (x_1,y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

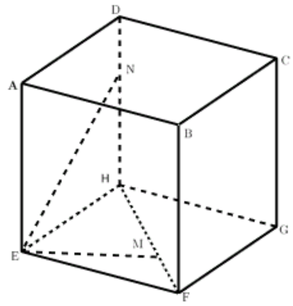
$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오

【3-1】

아래 그림과 같이 한변의 길이가 2인 정육면체 $\mathrm{ABCD-EFGH}$에서



선분 $\overline{\mathrm{HF}}$을 $2:1$로 내분하는 점을 M, 선분 $\overline{\mathrm{HD}}$를 2:1로 내분점을 N이라 하자. 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 각각 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{EM}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{EN}}$일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{EH}}$를 $\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ 로 표현할 때, 실수 α,β에 대하여 $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. (20점)

(2) 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$을 $\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$로 표현할 때, 실수 α,β,γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma$의 값을 구하시오. (30점)

【3-2】

(1) 포물선 $y^2=2x$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $y=4x+4$ 사이의 거리의 최솟값을 구하시오. (20점)

(2) 포물선 $y^2=2x$ 위를 움직이는 점 P와 점 $\mathrm{Q}(-\frac{1}{2},\,2)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값을 구하시오. (30점)

수학(문제 4)

[4] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서 순간 변화율

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

이 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(나)

함수 $f(x)$가 세 실수 a,b,c를 포함하는 닫힌 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【4-1】

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$가 다음과 같다. (단, a,b는 양의 정수이다.)

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{a}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x^2 & (0\le x\le 2) \\ \dfrac{1}{2}(x-b)^3+\dfrac{3}{2}(x-b)^2 & (2<x\le b) \\ 0 & (x<0 \text{ 또는 } x>b) \end{cases}$$

(1) a^2+b^2의 값을 (가)를 이용하여 구하시오. (30점)

(2) 닫힌 구간 $[0,\ b]$의 부분집합

$$A=\{x\,|\,f(x)=-f'(x)\}$$

을 원소나열법으로 나타내면 $A=\{0,\ c,\ b\}$이다. 상수 c의 값을 구하시오. (30점)

(3) 정적분의 값이

$$\int_1^3\left|\frac{f'(x)}{f(x)}+1\right|dx=-2+2\sqrt{3}+2\ln(p+q\sqrt{3})$$

일 때, 정수 p,q의 값에 대하여 $p+q$의 값을 (나)를 이용하여 구하시오. (40점)

2018학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사
자연계열 I 모범답안 및 채점기준

[문제 1]

출제의도

1. 순열과 조합의 뜻을 알고 그 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.
2. 확률의 의미와 그 기본 성질 (덧셈정리, 여사건 그리고 독립)을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
3. 이항분포를 포함한 이산확률분포의 기본 성질과 이산확률변수의 기댓값과 분산을 구할 수 있는지 평가한다.
4. 자연수의 계승을 계산할 수 있고, 조건을 만족하는 집합을 원소나열법으로 나타낼 수 있는지를 평가한다.
5. 조합의 수가 갖는 배수로서의 성질을 찾아낼 수 있는지를 평가한다.

문항해설

1. 1번 (1) 문항은 순열과 조합을 이용하여 사건의 경우의 수를 구하고 이를 이용하여 확률을 구할 수 있는 지 그리고 여사건의 성질을 이용하여 원하는 확률을 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다. 1번 (2) 문항은 확률의 기본성질인 덧셈정리, 여사건 그리고 독립의 성질을 이해하고 이를 이용하여 원하는 확률을 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.
2. 2번 문항은 이항분포를 따르는 이산확률변수 X의 확률분포표에 대한 성질을 이해하고 이를 이용하여 이산확률변수 X의 기댓값과 분산을 구할 수 있는지 알아보는 문제이다.
3. 3번 문항은 자연수의 계승을 계산을 할 수 있는지를 묻고, 주어진 조건에 따라 집합을 구할 수 있는지와 조합의 수의 배수로서의 성질을 파악할 수 있는지를 묻는 문항이다.

채점기준

하위문항	채점 기준	배점
1	1. 순열과 조합을 이용하여 사건의 경우의 수를 구하고 이를 이용하여 확률을 구하였는가? 그리고 이를 위해 여사건의 성질을 이용하였는가? 2. 확률의 기본성질인 덧셈정리, 여사건 그리고 독립의 성질을 이용하여 확률을 구하였는가?	30
2	1. 이항분포를 이용하여 각 확률을 구하였는가? 그리고 이를 이용하여 조건을 만족하는 p의 범위를 구하였는가? 2. 이항분포의 분산을 이용하여 분산이 최대가 되는 p의 값을 구하고 그 때의 기댓값과 분산을 구하였는가?	30
3	1. 순열의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 집합을 구하였는가? 2. 조합의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 자연수의 개수와 그 집합을 구하였는가?	40

예시답안

[물음 1]

(1) 먼저 각 주머니에서 꺼낸 공의 색깔이 모두 다른 경우의 사건을 A라고 하면 꺼낸 4개의 공 중에서 같은 색깔의 공이 있는 사건은 사건 A에 대한 여사건 A^c으로 그 확률은 $\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)$으로 구해진다. 각 주머니에서 2개의 공을 꺼내는 전체 경우의 수는 ${}_7C_2\times{}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}\times\frac{7\times6}{2\times1}=441$이고 각 주머니에서 꺼낸 공의 색

이 모두 다른 경우의 수는 ${}_7C_2\times{}_5C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}\times\dfrac{5\times4}{2\times1}=210$이다. 따라서

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_7C_2\times{}_5C_2}{{}_7C_2\times{}_7C_2}=\dfrac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{10}{21}$이고 $\underline{\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)=1-\dfrac{10}{21}=\dfrac{11}{21}}$이다.

(2) 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\dfrac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$이고 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^c)$이므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$이다.

두 사건 A, B가 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{P}(B)$이다. 따라서 $\underline{\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}}$이다.

[물음 2]

(1) 확률변수 X는 $B(3,p)$인 이항분포를 따르므로 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3	1

따라서 $(b+c)-(a+d)\geq\dfrac{1}{8}$은 $(3p(1-p))-(1-3p(1-p))\geq\dfrac{1}{8}$이고

$p^2-p+\dfrac{3}{16}=\left(p-\dfrac{1}{4}\right)\left(p-\dfrac{3}{4}\right)\leq0$이므로 $\underline{\dfrac{1}{4}\leq p\leq\dfrac{3}{4}}$이다.

(2) 확률변수 X가 $B(3,p)$인 이항분포이므로 분산은 $V(X)=3p(1-p)$로 $\underline{p=\dfrac{1}{2}}$에서 최대가 된다. 따라서 이때의

$\underline{E(X)=3p=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}}$이고 $\underline{V(X)=3p(1-p)=3\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}}$이다.

[물음 3]

(1) n이 제곱수이면 $n=a^2$에 대해 $a>2$이면
$(n-1)!=1\times2\times\cdots\times a\times\cdots\times2a\times\cdots\times(n-1)$이므로 n으로 나누어떨어진다. 단, $n=4$이면
$(4-1)!=6$이므로 4로 나누어떨어지지 않는다. n이 소수이면 1과 n이외에는 약수가 없으므로
$(n-1)!$은 n으로 나누어떨어지지 않는다. 단, n이 제곱수가 아닌 합성수이면 $n=n_1\times n_2$
(단, $1<n_1<n_2<n$)인 약수 n_1과 n_2를 가지므로
$(n-1)!=1\times2\times\cdots\times n_1\times\cdots\times n_2\times\cdots\times(n-1)$
은 n으로 나누어떨어진다. 따라서 [조건 1]과 [조건 2]를 만족하는 집합은 $\underline{A=\{2,3,4,5,7\}}$이다.

(2) 2이상의 소수 n의 경우에는 ${}_n\mathrm{C}_\mathrm{k}\,(1\leq\mathrm{k}\leq\mathrm{n}-1)$이 n의 배수가 되는 k의 개수가
$n-1$이고, $n=4$인 경우에는 ${}_4\mathrm{C}_k\,(1\leq k\leq3)$이 4의 배수가 되는 k의 개수는 2이다.
따라서 $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=2$, $x_5=4$, $x_7=6$이므로 집합 $\underline{B=\{1,2,4,6\}}$이고
모든 원소의 합은 $\underline{13}$이다.

[문제 2]

출제의도

1. 등차수열의 뜻을 알고, 그 수열의 일반항과 합을 구할 수 있는지를 평가한다.
2. 지수함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지를 평가한다.
3. 함수의 그래프의 개형을 그리고 방정식과 부등식에 활용할 수 있는지를 평가한다.

문항해설

【2-1】 (가)에 제시된 내용을 바탕으로 등차수열의 일반항과 등차수열의 합을 구하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

【2-2】 (나), (다)를 이용하여 지수함수의 그래프를 그리고, 두 그래프가 만나기 위한 조건을 방정식 또는 부등식으로 나타낸 후 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

채점기준

하위문항	채점 기준	배점
【2-1】 (1)	- a_k과 S_k를 이용하여 관계식으로 나타낸다. - k의 값을 구한다.	10점 5점
【2-1】 (2)	- 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 구한다. - a_5의 값을 구한다.	5점 10점
【2-1】 (3)	- a_n과 S_n의 일반식을 구하고 a_n+S_n을 식으로 나타낸다 - a_n+S_n이 최대가 되는 n과 그 값을 구한다.	10점 10점
【2-2】 (1)	- 두 함수의 그래프가 만나기 위한 조건을 α에 대한 식으로 나타낸다. - k의 값을 구한다.	10점 10점
【2-2】 (2)	- 두 함수의 그래프가 두 점에서 만나기 위한 모든 조건을 나타내고 식으로 표현한다. - k_0의 값을 구한다.	20점 10점

예시답안

【2-1】

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면 $a_1=35$이므로 (가)에 의하여

$$8=a_k=a_1+(k-1)d=35+(k-1)d$$

$$215=S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{k(35+a_k)}{2}=\frac{43k}{2}$$

이다. 따라서 $k=10$ 이고 $d=-3$ 이다. 그러므로 $a_n=38-3n$, $S_n=\dfrac{n(73-3n)}{2}$ 이다.

(1) $k=10$

(2) $a_5=38-3\times5=23$이다.

(3) $f(n) = a_n + S_n$이라 하면

$$f(n) = -\frac{1}{2}(3n^2 - 67n) + 38$$

이다. n은 자연수이므로 $f(n)$은 $n = 11$일 때, $f(11) = 225$를 갖는다.

【2-2】

(1) $\alpha = \log_2 3$이면 $2^\alpha = 3$ 이므로 $f(\alpha) = g(\alpha)$로부터 $k = \frac{17}{3}$이다.

(2) 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 함수

$$h(x) = f(x) - g(x) = 4^x + 8 - k \cdot 2^x$$

의 그래프가 x축과 두 점에서 만나는 경우이다. 함수 $h(x)$를 미분하면

$$h'(x) = 2^x \ln 2\ (2^{x+1} - k)$$

이다.

(i) $k \le 0$인 경우: 모든 x에 대하여 $h'(x) > 0$이므로 함수 $h(x)$의 그래프는 증가하므로 x축과 두 점에서 만날 수 없다.

(ii) $k > 0$인 경우: $h'(x) = 0$로부터 $x = \ln\frac{k}{2}$일 때 $h(x)$는 최솟값 $8 - \frac{k^2}{4}$를 갖는다. 도함수 $h'(x)$의 부호를 이용하여 함수의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	감소	$8 - \frac{k^2}{4}$	증가

또한 $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 8$이므로 $h(\ln\frac{k}{2}) < 0$이면 함수 $h(x)$ 의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 그러므로 $8 - \frac{k^2}{4} < 0$, 즉 $k > 4\sqrt{2}$ 이다. 따라서 $k_0 = 4\sqrt{2}$ 이다.

[별해] 함수 $h(x) = 2^x + 8 \cdot 2^{-x}$라 할 때, $h(x) = k$가 서로 다른 두 실근을 갖는 k의 값과 같다. $h'(x) = 2^{-x} \ln 2\,(4^x - 8)$이므로 $h(x)$는 $x = \frac{3}{2}$일 때 최솟값 $h(\frac{3}{2}) = 4\sqrt{2}$ 를 갖는다. 또 $h(x)$는 $x < \frac{3}{2}$이면 감소하고 $x > \frac{3}{2}$이면 증가하고, $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty$이다. 따라서 $h(x) = k$는 $k < 4\sqrt{2}$이면 해가 없고, $k = 4\sqrt{2}$이면 한 개의 실근을 갖고, $k > 4\sqrt{2}$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

[별해] 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 방정식

$$f(x) - g(x) = 4^x + 8 - k \cdot 2^x = 0$$

가 서로 다른 두 실근을 갖는 경우이다. $t = 2^x$라 하면 $t > 0$이고 t는 x가 증가하면 증가하므로 $t^2 - kt + 8 = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는 경우와 같다. 그러므로

$D = k^2 - 32 > 0$ 이고 $\frac{k}{2} > 0$이다. 따라서 $k > 4\sqrt{2}$ 이다.

[문제 3]

출제 의도

1. 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 연산을 할 수 있는지를 평가한다.
2. 평면좌표에서 두 점 사이의 거리, 점과 직선사이의 거리를 구할 수 있는지를 평가한다.
3. 도함수를 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 평가한다.
4. 도함수를 활용하여 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.

문항 해설

[3-1] (1) 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 연산을 계산할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[3-1] (2) 공간벡터의 연산을 계산할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[3-2] (1) 번 문항은 접선의 방정식을 구하고, 접점과 직선사이의 거리를 구할 수 있는지 묻는 문항이다.

[3-2] (2) 번 문항은 매개변수를 이용하여 두 점 사이의 거리를 구하고, 도함수를 활용하여 최솟값을 찾을 수 있는지 묻는 문항이다.

채점기준

하위문항	채점 기준	배점
3-1 1)	α와 β를 구하면 20점	20점
3-1 (2)	α, β, γ를 구하면 25점 합을 구하면 5점.	30점
3-2 (1)	접선의 방정식을 이용하여 접점을 구하면 15점 접점과 직선 사이의 거리를 구하면 5점.	20점
3-2 (2)	매개변수를 이용하여 두 점 사이의 거리를 구하면 10점 미분을 이용하여 최솟값을 구하면 20점.	30점

예시 답안

[3-1]

$\vec{a} = a\vec{e_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{EH}} = a\vec{e_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{EA}} = a\vec{e_3}$

$$\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

(1)

$$\vec{b} = \frac{a}{3}(2\vec{e_1} + \vec{e_2}), \quad \vec{c} = a(\vec{e_2} + \frac{2}{3}\vec{e_3})$$

따라서,

$$a\vec{e_2} = \overrightarrow{\mathrm{EH}} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{a} = a\alpha(\frac{2}{3}\vec{e_1} + \frac{1}{3}\vec{e_2}) + a\beta\vec{e_1}$$

이고

$$\overrightarrow{e_2}=(\frac{2}{3}\alpha+\beta)\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{3}\alpha\overrightarrow{e_2}$$

이다. 따라서, $\alpha=3$이고 $\frac{2}{3}\alpha+\beta=0$이여야 한다.

두식을 연립하여 풀면, $\beta=-2$이고, $\alpha+\beta=1$이다.

(2) 같은 방법으로

$$\overrightarrow{e_3}=(\alpha+\frac{2}{3}\beta)\overrightarrow{e_1}+(\frac{1}{3}\beta+\gamma)\overrightarrow{e_2}+\frac{2}{3}\gamma\overrightarrow{e_3}$$

임을 알 수 있다. 따라서,

$$\alpha+\frac{2}{3}\beta=0,\quad \frac{1}{3}\beta+\gamma=0,\quad \frac{2}{3}\gamma=1$$

이여야 한다. 세 식을 연립하여 풀면,

$$\alpha=3,\quad \beta=-\frac{9}{2},\quad \gamma=\frac{3}{2}$$

이므로,

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

이다.

[3-2]

(1) 포물선과 직선의 거리의 최솟값은 기울기가 4인 포물선의 접선과 직선의 거리가 된다.

즉, $y'=4$ 이므로 접점은 $(\frac{1}{32},\frac{1}{4})$이 되고,

제시문 (라)에 의하여 거리는 $\frac{31\sqrt{17}}{136}$ 이 된다.

(2) 구하는 두 점 사이의 거리의 제곱은 $f(y)=(x+\frac{1}{2})^2+(y-2)^2=(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2})^2+(y-2)^2$

이고 양변을 미분하면, $f'(y)=y^3+3y-4=(y-1)(y^2+y+4)$ 이므로

$y=1$에서 최솟값 $\overline{PQ}=\sqrt{2}$ 을 갖는다.

[문제 4]

출제 의도

1. 함수의 미분 가능성의 뜻을 알고 이를 이용하여 미정 계수를 결정할 수 있는지를 평가한다.
2. 함수의 도함수를 구하여 조건을 만족시키는 실수를 구할 수 있는지를 평가한다.
3. 정적분의 성질과 치환적분법을 활용하여 준 함수의 정적분을 구할 수 있는지를 평가한다.

문항해설

1. (1) 번 문항은 미분의 정의를 알고 다항함수의 도함수를 구하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.
2. (2) 번 문항은 다항 함수의 도함수를 구하여 조건에 알맞은 수를 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다.
3. (3) 번 문항은 치환 적분법을 활용하여 정적분 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

채점기준

하위문항	채점 기준	배점
(1)	-제시문 (가)의 미분 가능 조건으로부터 연립방정식을 찾아내면 각 5점 -a와 b의 값을 구하면 15점 -a^2+b^2의 값을 찾으면 5점	30점
(2)	-구간 $[0,2]$에서 조건을 만족시키는 실수 c가 존재하지 않음을 기술 하면 10점 -구간 $[2,4]$에서 조건을 만족시키는 실수 c를 찾으면 20점	30점
(3)	-c값을 기준으로 제시문 (나)를 이용하여 적분구간을 나누면 10점 -각 구간에서 적분값을 구하면 각각 10점 -$p+q$의 값을 구하면 10점	40점

예시답안

(1) 함수 $f(x)$가 실수 전체에서 미분 가능하므로,

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}\cdot 2^3+\frac{3}{2}\cdot 2^2=\frac{1}{2}\cdot(2-b)^3+\frac{3}{2}\cdot(2-b)^2 \\ -\frac{3a}{2}\cdot 2^2+\frac{6}{2}\cdot 2=\frac{3}{2}\cdot(2-b)^2+\frac{6}{2}\cdot(2-b) \end{cases}$$

이 방정식을 풀면, $a=1, b=4$. 따라서, $a^2+b^2=17$

(2) 구간 $[0,2]$에서 방정식 $f(x)+f'(x)=-\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x^2+3x=0$

을 풀면, $x=0, \pm\sqrt{6}$. 따라서, 해당되는 x의 값은 존재하지 않는다. 한편, 구간 $[2,4]$에서 방정식

$f(x)+f'(x)=\frac{1}{2}(x-4)^3+\frac{3}{2}(x-4)^2+\frac{3}{2}(x-4)^2+3(x-4)=0$

을 풀면, $x=1\pm\sqrt{3}, 4$. 따라서, $c=1+\sqrt{3}$.

(3) $\int_1^3\left|\frac{f'(t)}{f(t)}+1\right|dt=\int_1^3\frac{|f'(t)+f(t)|}{f(t)}dt=\int_1^c\frac{f'(t)+f(t)}{f(t)}dt-\int_c^3\frac{f'(t)+f(t)}{f(t)}dt$

$=[\ln(f(t))+t]_1^c-[\ln(f(t))+t]_c^3$
$=2\{(\ln(f(c))+c\}-4$
$=2\{\ln(-9+6\sqrt{3})-1+\sqrt{3}\}$

따라서, $p+q=-3$.