2015학년도 경북대학교 대학입학전형 수시모집

AAT 자연계열Ⅱ 모의고사 모범답안

(수학 Ⅰ)

【물음 1】

【제시문 3】의 조건을 만족하는 다트판에서, 철수가 다트를 던져서 숫자 k가 나올 확률 a_k는 $a_k = \left(\frac{1}{m}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{m}\right)^k$이다. 따라서

$$㉮ = ㉰ = \frac{1}{m},\ ㉯ = k-1,\ ㉱ = k$$

이고 ㉮ − ㉯ − ㉰ + ㉱ $= 1$이다.

【물음 2】

【물음 1】의 수열 $a_k = \left(\frac{1}{m}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{m}\right)^k$에 대하여 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$의 부분합 S_n은 $S_n = 1 - \left(\frac{1}{m}\right)^n$이다. m이 2 이상의 자연수이므로 $0 < \frac{1}{m} < 1$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n$이 수렴하고 그 극한값은 1이다. 그러므로 **【제시문 1】**에 근거하여 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$이다.

【물음 3】

$b_{10} = \sum_{k=10}^{\infty} a_k = \left(\frac{1}{m}\right)^9$이다. 따라서 **【제시문 2】**로부터 기댓값 $E(X^2)$는

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{10} k^2 b_k = \sum_{k=1}^{9} k^2\left(\left(\frac{1}{m}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{m}\right)^k\right) + 10^2 b_{10} \\ &= \sum_{k=1}^{9}(2k-1)\left(\frac{1}{m}\right)^{k-1} - 9^2\left(\frac{1}{m}\right)^9 + 10^2 b_{10} \end{aligned}$$

가 된다. 여기에서 $S = \sum_{k=1}^{9}(2k-1)\left(\frac{1}{m}\right)^{k-1}$라고 두면

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{m}\right)S &= 1 + 2\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{m}\right)^k - 17\left(\frac{1}{m}\right)^9 \\ &= 1 + 2\frac{\frac{1}{m} - \left(\frac{1}{m}\right)^9}{1 - \frac{1}{m}} - 17\left(\frac{1}{m}\right)^9 \end{aligned}$$

이므로

$$S = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-1}\left[1 + 2\frac{\frac{1}{m} - \left(\frac{1}{m}\right)^9}{1 - \frac{1}{m}} - 17\left(\frac{1}{m}\right)^9\right]$$

이다. 따라서

$$E(X^2) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-1}\left[1 + 2\frac{\frac{1}{m} - \left(\frac{1}{m}\right)^9}{1 - \frac{1}{m}} - 17\left(\frac{1}{m}\right)^9\right] - 9^2\left(\frac{1}{m}\right)^9 + 10^2 b_{10}$$

이 된다.

(수학 II)

【물음 1】

(1) $\tan\frac{x}{2}=t$라 두면 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$이므로

$$\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{2}{(1+t)^2}dt=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

가 된다.

(2) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$에서 $0\le\sin x\le 1$이므로 $\frac{1}{1+\sin x}\ge 0$이다. 또한 (1)의 계산에 의해

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}dx=\left[-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

이 된다. 따라서 [제시문 1]에 의해 $f(x)=\frac{1}{1+\sin x}$는 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$에서 확률밀도함수이다.

【물음 2】

[물음 1]에 의해 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}dx=1$이다. 또한 $f(c)=\frac{1}{1+\sin c}$이므로

$x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $y=f(c)$로 둘러쌓인 사각형의 넓이는 $\frac{\pi}{2(1+\sin c)}$이다.

$\frac{\pi}{2(1+\sin c)}=1 \Leftrightarrow \sin c=\frac{\pi}{2}-1$이므로 $\sin c=\frac{\pi}{2}-1$인 c가 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에 존재함을 증명하면 된다.

한편 $\sin 0=0<\frac{\pi}{2}-1<1=\sin\frac{\pi}{2}$이고 $y=\sin x$가 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속이므로 [제시문 2]에 의해 c가 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.

【물음 3】

구하는 평균은 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin x}dx$이므로 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$에서 $g(x)=\frac{x}{1+\sin x}$라 두자.

$n=6$일 때, 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$의 양 끝점과 분점의 x-좌표는

$x_0=0$, $x_1=\frac{\pi}{12}$, $x_2=\frac{\pi}{6}$, $x_3=\frac{\pi}{4}$, $x_4=\frac{\pi}{3}$, $x_5=\frac{5\pi}{12}$, $x_6=\frac{\pi}{2}$가 된다.

$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$이므로 각 점에서의 y좌표는

$y_0=0$, $y_1=\frac{\pi}{12+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}$, $y_2=\frac{\pi}{9}$, $y_3=\frac{\pi}{4+2\sqrt{2}}$, $y_4=\frac{2\pi}{6+3\sqrt{3}}$, $y_5=\frac{5\pi}{12+3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$, $y_6=\frac{\pi}{4}$가 된다.

따라서 [제시문 3]에 의해 근사값은 S_6은

$$\begin{aligned}S_6&=\frac{\frac{\pi}{2}}{2\cdot 6}\left(0+2\frac{\pi}{12+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}+2\frac{\pi}{9}+2\frac{\pi}{4+2\sqrt{2}}+2\frac{2\pi}{6+3\sqrt{3}}+2\frac{5\pi}{12+3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{\pi}{24}\left(\frac{2\pi}{12+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}+\frac{17\pi}{36}+\frac{\pi}{2+\sqrt{2}}+\frac{4\pi}{6+3\sqrt{3}}+\frac{10\pi}{12+3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

가 된다.

(물 리)

【물음 1】

$T=\dfrac{2\pi r}{v}$ 로 표현되며, 행성의 원운동의 원인인 구심력은 만유인력에 해당한다. $F=G\dfrac{mM}{r^2}=\dfrac{mv^2}{r}$ 식에 $v=\dfrac{2\pi r}{T}$ 를 대입

$G\dfrac{mM}{r^2}=\dfrac{mv^2}{r}=\dfrac{m}{r}\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2$, $T^2=\dfrac{4\pi^2}{GM}r^3$ 케플러의 법칙 성립

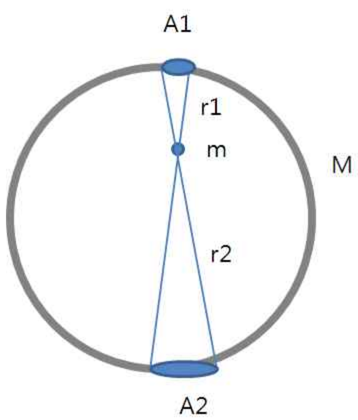
【물음 2】

$mg=\dfrac{GmM}{r^2}$

$g=\dfrac{G\rho V}{r^2}=\dfrac{G\rho}{r^2}\dfrac{4\pi r^3}{3}=\dfrac{4\pi\rho rG}{3}$

$g\sim\rho r...$ 4배 이다.

【물음 3】



(답) 내부에 있는 점입자에 미치는 만유인력의 크기는 0이다.

(설명) 그림과 같이 구 껍질 내부에 있는 질량 m인 점입자를 생각해 보자. 점입자를 지나는 직선들이 만드는 꼭지각이 매우 작은 원뿔이 구 껍질과 만나는 점들의 집합은 면적 A1, A2를 갖는다. 이 면적 비는 점 입자로부터 표면까지의 거리인 r1과 r2 거리의 제곱에 비례한다. 밀도가 일정할 때 면적비는 질량비이다. 따라서 A1과 A2가 점 입자에 미치는 만유인력의 크기는 같고 방향은 반대이다. 모든 방향에 대해서 이러한 원뿔을 만들면 구 껍질에 있는 면적들은 항상 크기는 같고 방향이 반대인 만유인력에 의해 상쇄되므로 만유인력의 합은 0이다.

(화 학)

【물음 1】

금속 Zn은 수소 이온(H^+) 보다 이온화되는 경향성이 더 크므로 염산 용액의 수소 이온을 환원시켜 수소를 발생시킨다.
반응식: $Zn(s)$ + $2H^+(aq)$ → $Zn^{2+}(aq)$ + $H_2(g)$

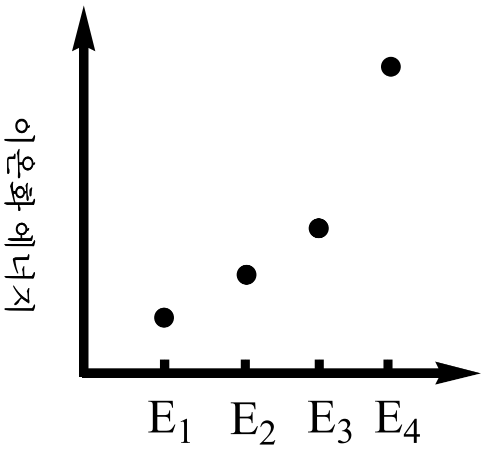
금속 Fe는 수소 이온(H^+) 보다 이온화되는 경향성이 더 크므로 염산 용액의 수소 이온을 환원시켜 수소를 발생시킨다.
반응식: $Fe(s)$ + $2H^+(aq)$ → $Fe^{2+}(aq)$ + $H_2(g)$

금속 Cu는 수소 이온(H^+) 보다 이온화되는 경향성이 더 적으므로 염산 용액의 수소 이온을 환원시키지 못해서 수소를 발생시키지 못하고 반응이 일어나지 않는다.
반응식: $Cu(s)$ + $2H^+(aq)$ $\nrightarrow$ $Cu^{2+}(aq)$ + $H_2(g)$ (반응하지 않음)

금속 Zn은 금속 Fe 보다 이온화가 더 잘 일어남으로 금속 Zn을 염산에 가했을 때 수소 기체가 더 격렬하게 발생함을 관측할 수 있다.

【물음 2】

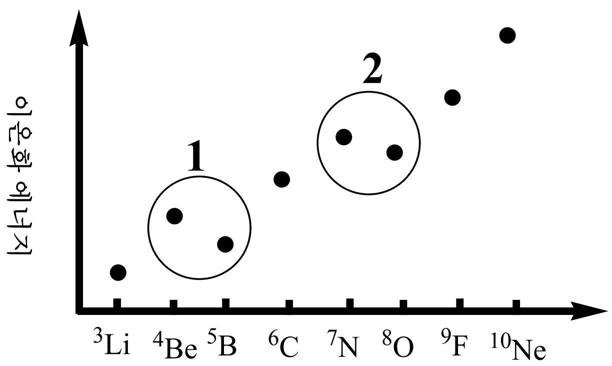
알루미늄의 순차적 이온화 에너지의 변화는 다음과 같이 나타낼 수 있다.



같은 전자껍질인 $3s^2 3p^1$의 3개의 전자가 순차적으로 이온화될 때는 전자 사이의 반발력은 감소하고, 원자핵과 전자 사이의 인력은 증가(유효핵전하의 증가)하기 때문에 순차적 이온화 에너지(E_1, E_2, E_3)는 점점 증가한다. 하지만 제사 이온화 에너지(E_4)는 급격히 증가하는 변화를 보인다. 이것은 4번째 전자는 팔전자 규칙에 의하여 매우 안정화가 되어 있어(또는 안쪽 전자껍질에 있는 전자가 느끼는 유효핵전하는 훨씬 커지기 때문에) 이를 떼어 내기 위해서는 매우 큰 에너지가 요구됨으로 E_4는 급격히 증가한다.

【물음 3】

2주기 원소의 제일 이온화 에너지의 변화를 다음과 같이 나타낼 수 있다.



일반적으로 원자번호가 증가할수록 유효핵전하가 커지므로 제일 이온화 에너지는 증가하는 경향성을 보여준다(오른쪽으로 갈수록 증가). 하지만 원으로 표시한 1과 2는 일반적인 경향성과는 다른 형태를 보여준다. 그 이유는 다음과 같다.

1: Be에서 B로 갈 때 이온화 에너지가 감소하였다. 즉, Be는 $1s^2 2s^2$의 전자배치를, B는 $1s^2 2s^2 2p^1$의 전자배치를 가진다. B의 새로운 전자 1개는 에너지가 높은 p 오비탈에 들어가게 되어 Be보다 안정성이 낮아지기 때문에(또는, B의 꽉찬 2s 오비탈의 전자들이 2p 오비탈의 전자 1개에 대해 핵전하를 가리는 효과 때문에), 제일 이온화 에너지는 Be가 B보다 크다.

2: N는 $1s^2 2s^2 2p^3$의 전자배치를, O는 $1s^2 2s^2 2p^4$의 전자배치를 가진다. N은 훈트 규칙에 의해 3 개의 p 오비탈에 각각 1개씩 전자를 가지는 안정한 전자배치를 가진다. O의 경우 4번째 전자가 1개씩 채워져 있는 3개의 p 오비탈 중 하나에 전자가 쌍을 이루며 채워지게 됨으로써 전자간의 반발이 존재하게 된다. 따라서 이 경우 O의 제일 이온화는 쉽게 일어나고 제일 이온화 에너지는 N보다 O가 더 낮게 된다.

(생명 과학)

【물음 1】

외할아버지가 혈우병이어서 혈우병을 가진 X 염색체를 물려받더라도 정상인 외할머니에게서 물려받은 정상 X 염색체에 의해 혈우병 형질이 '숨겨지기 때문에(masked)' 어머니의 표현형은 정상인과 같다.

【물음 2】

누나는 혈우병 증상이 나타나지 않았지만 X'X인지, XX인지 확실치 않으므로 두 가지 경우를 나누어서 생각해야 한다. X'X인 경우 태어나는 자식의 유전형은 총 X'X, X'Y, XX, XY이고, 누나가 XX인 경우 태어나는 자식의 유전형은 총 XX, XY, XX, XY이다. 따라서 1/8.

【물음 3】

다운 신드롬은 21번 상염색체 수에 이상이 있을 경우 발생하는 유전 질환이다. 따라서 성염색체의 유전 형질에는 아무런 영향을 주지 못한다 (독립의 법칙). 남자아이의 유전형은 X'Y, XY, XY, XY 이므로 혈우병에 걸렸을 확률은 1/4

(지구 과학)

【물음 1】

피나투보 화산의 구성암석은 [제시문 3]에서 서술한 바와 같이 주로 <u>안산암, 석영안산암, 화산쇄설암</u>이다. 또한 화산재가 40km까지 올라갔다는 것은 <u>화산가스의 함량이 높은 안산암질 마그마가 분출</u>된 것이다. 따라서 피나투보 화산의 종류는 <u>성층화산</u>에 속한다.

【물음 2】

강수현상이 있는 대류권의 경우 에어로솔이 대기에 머무는 시간이 짧다. 반면 강수가 없는 성층권의 경우 강수에 의한 에어로솔의 제거과정이 없으므로 대기에 머무는 시간이 길어진다. 피나투보 화산이 이듬해에 기온하강을 일으킨 것은 화산폭발 이후 대기 중에서 형성된 반사율이 높은 황산염이 성층권 대기 중에 오래 머물면서 태양복사를 반사시켜 지표면에 도달한 태양복사에너지를 감소시켰기 때문이다.

【물음 3】

대기 중 에어로솔은 강수에 의해 제거되어지므로 배출되어 멀리 이동하지 못하고 주로 오염물질이 배출되는 지역에서 농도가 높게 나타난다. 온실기체에 의한 온난화 현상은 항상 존재하지만 주간에는 대기 중 에어로솔에 의해 지면에 도달하는 태양복사에너지가 감소하여 온실기체에 의한 온난화 효과를 상쇄하므로 온난화 효과가 뚜렷하지 않은 반면 야간에는 에어로솔의 냉각효과가 없으므로 온난화 효과가 더 뚜렷하게 나타난다.