

2015학년도 경북대학교 대학입학전형 수시모집
AAT 자연계열 I 모의고사 모범답안

(수학 I)

【물음 1】

【제시문 3】의 조건을 만족하는 다트판에서, 철수가 다트를 던져서 숫자 k 가 나올 확률 a_k 는 $a_k = \left(\frac{1}{m}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{m}\right)^k$ 이다. 따라서

$$\textcircled{㉠} = \textcircled{㉡} = \frac{1}{m}, \quad \textcircled{㉢} = k-1, \quad \textcircled{㉣} = k$$

이고 $\textcircled{㉠} - \textcircled{㉢} - \textcircled{㉡} + \textcircled{㉣} = 1$ 이다.

【물음 2】

【물음 1】의 수열 $a_k = \left(\frac{1}{m}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{m}\right)^k$ 에 대하여 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 의 부분합 S_n 은 $S_n = 1 - \left(\frac{1}{m}\right)^n$ 이다. m 이 2 이상의 자연수이므로 $0 < \frac{1}{m} < 1$ 이다. 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 이 수렴하고 그 극한값은 1이다. 그러므로 **【제시문 1】**에 근거하여 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$ 이다.

【물음 3】

$b_{10} = \sum_{k=10}^{\infty} a_k = \left(\frac{1}{m}\right)^9$ 이다. 따라서 **【제시문 2】**로부터 기댓값 $E(X^2)$ 는

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{10} k^2 b_k = \sum_{k=1}^9 k^2 \left(\left(\frac{1}{m}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{m}\right)^k \right) + 10^2 b_{10} \\ &= \sum_{k=1}^9 (2k-1) \left(\frac{1}{m}\right)^{k-1} - 9^2 \left(\frac{1}{m}\right)^9 + 10^2 b_{10} \end{aligned}$$

가 된다. 여기에서 $S = \sum_{k=1}^9 (2k-1) \left(\frac{1}{m}\right)^{k-1}$ 라고 두면

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{m}\right)S &= 1 + 2 \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{m}\right)^k - 17 \left(\frac{1}{m}\right)^9 \\ &= 1 + 2 \frac{\frac{1}{m} - \left(\frac{1}{m}\right)^9}{1 - \frac{1}{m}} - 17 \left(\frac{1}{m}\right)^9 \end{aligned}$$

이므로

$$S = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-1} \left[1 + 2 \frac{\frac{1}{m} - \left(\frac{1}{m}\right)^9}{1 - \frac{1}{m}} - 17 \left(\frac{1}{m}\right)^9 \right]$$

이다. 따라서

$$E(X^2) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-1} \left[1 + 2 \frac{\frac{1}{m} - \left(\frac{1}{m}\right)^9}{1 - \frac{1}{m}} - 17 \left(\frac{1}{m}\right)^9 \right] - 9^2 \left(\frac{1}{m}\right)^9 + 10^2 b_{10}$$

이 된다.

(수학 Ⅱ)

【물음 1】

p, q 가 1보다 큰 실수이므로

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{p-1} = q-1$$

가 성립한다. 따라서 【제시문 3】에 의해 $y = x^{p-1}$ 의 역함수는

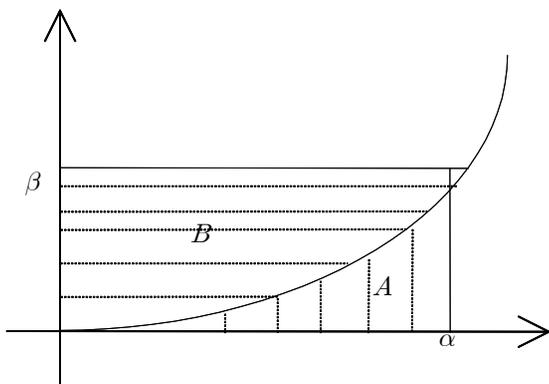
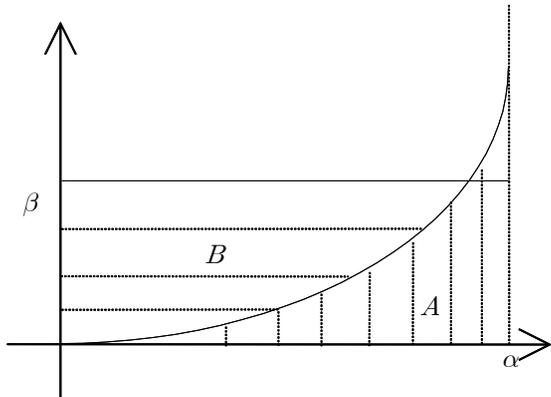
$$y = x^{q-1}$$

이다.

【물음 2】

$$\int_0^\alpha x^{p-1} dx = \frac{\alpha^p}{p} = A \text{ 이고 } \int_0^\beta x^{q-1} dx = \frac{\beta^q}{q} = B \text{ 이다.}$$

(아래그림참조)



$\alpha\beta$ 는 직사각형의 넓이이므로 주어진 그림처럼 적분의 합이 더 크다.

【물음 3】

$\alpha = \frac{|a_1|}{c}, \beta = \frac{|b_1|}{d}$ 이라 두면 【물음 2】에 의해

$$2|a_1||b_1| \leq \frac{a_1^2 d}{c} + \frac{b_1^2 c}{d}$$

가 성립한다. 같은 방법으로

$$2|a_2||b_2| \leq \frac{a_2^2 d}{c} + \frac{b_2^2 c}{d}$$

도 성립한다. 두 식의 양변을 각각 더하여 정리하면

$$|a_1||b_1| + |a_2||b_2| \leq cd$$

가 된다. 그런데 $c = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, d = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ 이므로

$$|a_1||b_1| + |a_2||b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

이다.

(물 리)

【물음 1】

$$\frac{GmM}{r^2}$$

【물음 2】

$T = \frac{2\pi r}{v}$ 로 표현되며, 행성의 원운동의 원인인 구심력은 만유인력에 해당한다. $F = G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$ 식에 $v = \frac{2\pi r}{T}$ 를 대입

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r} \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2, T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \text{ 케플러의 법칙 성립}$$

【물음 3】

$$mg = \frac{GmM}{r^2}$$

$$g = \frac{G\rho V}{r^2} = \frac{G\rho}{r^2} \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi\rho r G}{3}$$

$g \sim \rho r \dots$ 4배 이다.

(화 학)

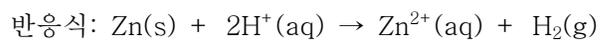
【물음 1】

이온 반지름이 큰 것부터 나열하면 $O^{2-} > F^- > Na^+ > Mg^{2+}$ 이다.

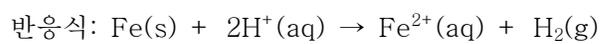
제시문 1에서와 같이 원자번호가 증가하면 유효핵전하가 증가한다. 유효핵전하가 크면 이온의 반지름은 작아지게 된다. 4개의 이온들은 등전자이므로 전자들 간의 반발력이나 가리움 효과는 동일하다. 따라서 원자번호 순으로 유효핵전하는 증가하고 이온 반지름은 작아지게 된다.

【물음 2】

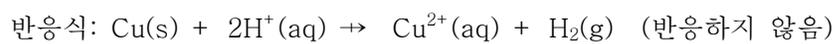
금속 Zn은 수소 이온(H^+) 보다 이온화되는 경향성이 더 크므로 염산 용액의 수소 이온을 환원시켜 수소를 발생시킨다.



금속 Fe는 수소 이온(H^+) 보다 이온화되는 경향성이 더 크므로 염산 용액의 수소 이온을 환원시켜 수소를 발생시킨다.



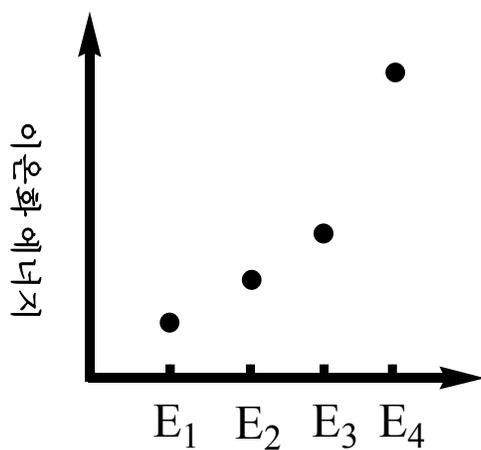
금속 Cu는 수소 이온(H^+) 보다 이온화되는 경향성이 더 적으므로 염산 용액의 수소 이온을 환원시키지 못해서 수소를 발생시키지 못하고 반응이 일어나지 않는다.



금속 Zn은 금속 Fe 보다 이온화가 더 잘 일어남으로 금속 Zn을 염산에 가했을 때 수소 기체가 더 격렬하게 발생함을 관측할 수 있다.

【물음 3】

알루미늄의 순차적 이온화 에너지의 변화는 다음과 같이 나타낼 수 있다.



같은 전자껍질인 $3s^2 3p^1$ 의 3개의 전자가 순차적으로 이온화될 때는 전자 사이의 반발력은 감소하고, 원자핵과 전자 사이의 인력은 증가(유효핵전하의 증가)하기 때문에 순차적 이온화 에너지(E_1, E_2, E_3)는 점점 증가한다. 하지만 제4 이온화 에너지(E_4)는 급격히 증가하는 변화를 보인다. 이것은 4번째 전자는 팔전자 규칙에 의하여 매우 안정화가 되어 있어 (또는 안쪽 전자껍질에 있는 전자가 느끼는 유효핵전하는 훨씬 커지기 때문에) 이를 떼어 내기 위해서는 매우 큰 에너지가 요구됨으로 E_4 는 급격히 증가한다.

(생명 과학)

【물음 1】

외할아버지가 혈우병이어서 혈우병을 가진 X 염색체를 물려받더라도 정상인 외할머니에게서 물려받은 정상 X 염색체에 의해 혈우병 형질이 ‘숨겨지기 때문에(masked)’ 어머니의 표현형은 정상인과 같다.

【물음 2】

누나는 혈우병 증상이 나타나지 않았지만 X'X인지, XX인지 확실치 않으므로 두 가지 경우를 나누어서 생각해야 한다. X'X인 경우 태어나는 자식의 유전형은 총 X'X, X'Y, XX, XY이고, 누나가 XX인 경우 태어나는 자식의 유전형은 총 XX, XY, XX, XY이다. 따라서 1/8

【물음 3】

누나는 혈우병 증상이 나타나지 않았지만 X'X인지, XX인지 확실치 않으므로 두 가지 경우를 나누어서 생각해야 한다. X'X인 경우 태어나는 자식의 유전형은 총 X'X', X'Y, XX', XY이고, 누나가 XX인 경우 태어나는 자식의 유전형은 총 XX', XY, XX', XY이다. 하지만 X'X'인 경우 태어나기 전에 죽기 때문에 이 경우의 수를 제외하면 1/7

(지구 과학)

【물음 1】

피나투보 화산의 구성암석은 [제시문 3]에서 서술한 바와 같이 주로 안산암, 석영안산암, 화산쇄설암이다. 또한 화산재가 40km까지 올라갔다는 것은 화산가스의 함량이 높은 안산암질 마그마가 분출된 것이다. 따라서 피나투보 화산의 종류는 성층화산에 속한다.

【물음 2】

강수현상이 있는 대류권의 경우 에어로솔이 대기에 머무는 시간이 짧다. 반면 강수가 없는 성층권의 경우 강수에 의한 에어로솔의 제거과정이 없으므로 대기에 머무는 시간이 길어진다. 피나투보 화산이 이듬해에 기온하강을 일으킨 것은 화산폭발 이후 대기 중에서 형성된 반사율이 높은 황산염이 성층권 대기 중에 오래 머물면서 태양복사를 반사시켜 지표면에 도달한 태양복사에너지를 감소시켰기 때문이다.

【물음 3】

(1) 판 경계의 종류: 수렴경계, 섭입경계, 소멸경계

근거: 해구의 발달과 호상열도(화산호) 형성은 수렴경계의 전형적인 특징이다.

피나투보 화산은 유라시아판(해양암석권)이 필리핀판 아래로 섭입되는 수렴경계에서 형성되었다. 따라서 필리핀판 연변부에는 마닐라 해구와 거의 평행하게 화산들이 배열되어 있는 호상열도(화산호)가 생성된다.