자연 (오후)

2019학년도 신입학 수시
논술 전형

성명		지원 학부·학과		수험 번호	

· 답안지와 문제지에 성명, 지원 학부·학과, 수험 번호를 정확히 기입하시오.

· 답안지에 정답 외에는 어떠한 표시도 하지 마시오.

· 90분 안에 답안을 작성하시오.

· 고사 종료 후 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.

· 진행을 위한 감독자의 지시에 응하지 않을 시 퇴실 요구를 받을 수 있습니다.

유의 사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로만 작성하시오.
   (빨간색이나 파란색 등 사용 금지)
2. 답안지 수정 시에는 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나, 가로로 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재작성 하시오.(수정테이프, 수정액 사용 불가)
3. 본 고사의 답안은 1매 이내에 작성을 해야 하며, 답안지 교체는 가능하나 기존 답안지 제출은 절대 불가합니다.
4. 답안지 교체로 인한 책임(시간 부족 등)은 요청한 수험생에게 있습니다.
5. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안을 검정색 펜으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내거나 답안과 관련 없는 표현이나 표기를 한 경우
   3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우
   4) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우

※ 감독의 지시가 있을 때까지 다음 장으로 넘기지 마시오.

이 면은 여백입니다.

[문제 1] 다음 제시문 <가>와 <나>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,2\pi]$에서 연속이고,

$$f'(x)=\begin{cases} k|\cos x| \ (0<x<\frac{1}{2}\pi) \\ l|\cos x| \ (\frac{1}{2}\pi<x<\pi) \\ m|\cos x| \ (\pi<x<\frac{3}{2}\pi) \\ n|\cos x| \ (\frac{3}{2}\pi<x<2\pi) \end{cases}$$

를 만족시킨다.

<나> 정적분의 치환적분법

닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 닫힌구간 $[\alpha,\beta]$에서 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

1-1. 제시문 <가>의 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$과 $f(2\pi)=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 k, l, m, n의 모든 순서쌍 $(k,\ l,\ m,\ n)$의 개수를 구하시오. [15점]

[풀이]

$f'(x)\geq 0$이므로 $f(x)$가 증가함수이다.

$$f(\frac{\pi}{2})-f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}k\cos x\,dx=[k\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=k$$

$$f(\pi)-f(\frac{\pi}{2})=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f'(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-l\cos x\,dx=[-l\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=l$$

$$f(\frac{3\pi}{2})-f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}f'(x)\,dx=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}-m\cos x\,dx=[-m\sin x]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=m$$

$$f(2\pi)-f(\frac{3\pi}{2})=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}f'(x)\,dx=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}n\cos x\,dx=[n\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=n \text{ 이고}$$

$f(x)$가 $[0,2\pi]$에서 연속함수이므로 $8=f(2\pi)-f(0)=k+l+m+n$을 얻는다.

따라서, 구하는 순서쌍의 개수는 중복조합의 수이므로 ${}_4H_8={}_{11}C_8=\frac{11\times10\times9}{1\times2\times3}=165$이다.

1-2. 제시문 <가>의 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$이고 $f(2\pi)=8$일 때, $k\leq l\leq m=n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 k, l, m, n의 순서쌍 $(k,\ l,\ m,\ n)$의 개수를 구하시오. [10점]

[풀이]

문제 1-1의 풀이에 의해 구하는 개수는 $k\leq l\leq m=n$와 $k+l+m+n=8$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수와 같다. 이의 개수를 구해보자.

(i) $m=n=4$일 때, $(k,l,m,n)=(0,0,4,4)$인 한 개의 해가 존재한다.

(ii) $m=n=3$일 때, 이는 $k\leq l$이고 $k+l=2$인 해를 구하는 경우이므로 (k,l,m,n)은 $(0,2,3,3)$ 혹은 $(1,1,3,3)$인 두 개의 해가 존재한다.

(iii) $m=n=2$일 때, 이는 $k\leq l\leq 2$이고 $k+l=4$인 해를 구하는 경우이므로 $(k,l,m,n)=(2,2,2,2)$인 한 개의 해가 존재한다.

$m=n\leq 1$인 경우 $k+l+m+n\leq 4$이고 $m=n\geq 5$인 경우 $k+l+m+n\geq 10$이므로 해가 존재하지 않는다. 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 4이다.

[뒷면에 계속]

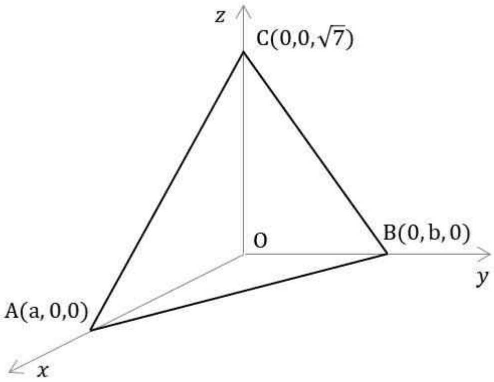
1−3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2a\sin x+2b\cos x+3c\sin^3 x+3d\cos^3 x)\,dx=20$과 $a<b<c<d$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [10점]

[풀이]

$-\cos x=t$로 치환하면 $\sin x\ dx=dt$ 이므로 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\ dx=\int_{-1}^{0}(1-t^2)\ dt=\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0}=\frac{2}{3}$ 이고 $\sin x=u$로 치환하면 $\cos x\ dx=du$ 이므로 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\ dx=\int_{0}^{1}(1-u^2)\ du=\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}$이다. 그리고 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ dx=1$이므로 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2a\sin x+2b\cos x+3c\sin^3 x+3d\cos^3 x)\,dx=20$은 $a+b+c+d=10$과 동치이다. 따라서 구하는 수는 $a<b<c<d$와 $a+b+c+d=10$를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수와 같다. $a'=a,\ b'=b-1,\ c'=c-2,\ d'=d-3$이라면 조건 $a'\le b'\le c'\le d'$와 $a'+b'+c'+d'=4$을 얻는데 이는 위의 조건과 동치이다. 이때 (i)$d'=4$이면 $(a',b',c')=(0,0,0)$를 얻고, (ii)$d'=3$이면 $c'=1$과 $(a',b',c')=(0,0,1)$, (iii)$d'=2$이면 $(a',b',c')=(0,0,2)$ 혹은 $(a',b',c')=(0,1,1)$을 얻고, (iv)$d'=1$ 이면 $(a',b',c')=(1,1,1)$을 얻는다. 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 5이다.

[뒷면에 계속]

[문제 2] 다음 제시문 <가>~<마>를 읽고 물음에 답하시오.



<가> a, b는 양수이고 $a > b$이다.

<나> 삼각형 ABC의 면적은 $\frac{3}{2}\sqrt{7}$이다.

<다> 평면 α는 세 점 A, B, C를 지난다.

<라> 원점 O에서 평면 α까지의 거리는 $\frac{\sqrt{7}}{3}$이다.

<마> 평면 α와 xy평면이 이루는 이면각 중 예각을 θ라 하자. 이때, 평면 α와 AB를 지나는 직선을 교선으로 갖는 평면 β는 θ를 이등분한다.

2-1. 평면 α의 방정식을 구하시오. [15점]

[풀이]

원점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 그러면 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이고 $\overline{CH}\perp\overline{AB}$이다. $\overline{OH}=l$라 하면 $\triangle OAB$의 넓이로 부터

$\frac{1}{2}l\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{2}ab \quad\Rightarrow\quad l=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,\sqrt{7})$을 지나는 평면 α의 방정식은

$\sqrt{7}bx+\sqrt{7}ay+abz-\sqrt{7}ab=0$ 이므로

원점으로부터의 거리는

$$\frac{|-\sqrt{7}ab|}{\sqrt{7b^2+7a^2+a^2b^2}}=\frac{\sqrt{7}}{3} \quad\Rightarrow\quad 3ab=\sqrt{7a^2+7b^2+a^2b^2}$$

$$\Rightarrow\quad 8a^2b^2=7(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

그러므로 $l=\sqrt{\frac{7}{8}}$

[뒷면에 계속]

$\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2}\sqrt{7+l^2}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$

$\sqrt{7+l^2} = \sqrt{\frac{63}{8}}$

$a^2+b^2 = 8$ 이고 $ab = \sqrt{7}$

이를 풀면 $a = \sqrt{7}$, $b = 1$ $(a > b)$

평면의 방정식 $px+qy+rz+s=0$에 $(\sqrt{7},0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,\sqrt{7})$을 대입하여 풀면

평면 α의 방정식은

$x+\sqrt{7}y+z-\sqrt{7}=0$ 이다.

2-2. 평면 β가 z축과 만나는 점을 D 라 할 때, 삼각형 ABC 와 삼각형 ABD 의 넓이의 비와 평면 β의 방정식을 구하시오. [20점]

[풀이]

$\overline{OD}=m$이라 하자.

평면 β는 $\angle$OHC 의 각을 이등분하므로

$\overline{\mathrm{CH}}:\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{OD}}$ 에서

$\sqrt{\frac{63}{8}}:\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{7}-m:m$

$m=\frac{\sqrt{7}}{4}$을 얻는다.

삼각형 ABC 의 넓이:삼각형 ABD 의 넓이$=\overline{\mathrm{CH}}:\overline{\mathrm{DH}}=\sqrt{\frac{63}{8}}:\sqrt{\frac{21}{16}}=\sqrt{6}:1$

평면의 방정식 $px+qy+rz+s=0$에 $(\sqrt{7},0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,\frac{\sqrt{7}}{4})$을 대입하여 풀면

그러므로 평면 β의 방정식은 $x+\sqrt{7}y+4z-\sqrt{7}=0$ 이다.

[뒷면에 계속]

[문제 3] 다음 제시문 <가>와 <나>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 이산확률변수 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,2,\ldots,n)$는 다음을 만족한다.

① $0 \le p_i \le 1$

② $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

<나> 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,2,\ldots,n)$일 때, X의 기댓값은

$$\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

3-1. $2n$ 개의 면을 갖는 볼록 다면체의 각 면에 $1,2,\ldots,2n$ 의 숫자가 적혀있다. 이 볼록 다면체를 두 번 던졌을 때 처음에는 홀수, 두 번째는 짝수가 나올 확률의 최댓값을 구하시오. [10점]

[풀이]

확률변수 X가 홀수일 확률을 p라 하면 짝수일 확률은 $1-p$이므로

구하고자 하는 확률은 $p(1-p)$이다. p는 0과 1사이의 값이므로 이 확률의 최댓값은 $\frac{1}{4}$이 된다.

<별해>

X가 홀수일 확률 $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(X=2k-1)=p_1+p_3+\cdots+p_{2n-1}$

X가 짝수일 확률 $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(X=2k)=p_2+p_4+\cdots+p_{2n}$

$r=(p_1+p_3+\cdots+p_{2n-1})(p_2+p_4+\cdots+p_{2n})$이며, 제시문 <가>에 의하여 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{2n}=1$이고 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $r=(p_1+p_3+\cdots+p_{2n-1})(p_2+p_4+\cdots+p_{2n}) \le \left(\frac{p_1+p_2+\cdots+p_{2n}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이다.

따라서 r의 최댓값은 $\frac{1}{4}$이 된다.

3-2. 문제 3-1에 주어진 볼록 다면체를 던졌을 때 나오는 수를 확률변수 X라 하자. X가 정수 x보다 작거나 같을 확률이 $cx(x+1)$일 때(단, $x=1,2,\ldots,2n$, c는 상수), X의 확률질량함수 p_x의 값을 구하고, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 n으로 나타내시오. [20점]

[풀이]

$p_1=\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X\le 1)-\mathrm{P}(X\le 0)=2c$이고

$x\ge 2$일 때, $p_x=P(X\le x)-P(X\le x-1)=cx(x+1)-c(x-1)x=2cx$

이것은 $x=1$일 때도 성립한다. <가>에 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{2n}=1$ 이므로

$2c(1+2+3+\cdots+2n)=1$에서 $2cn(2n+1)=1$이다.

따라서 $c=\frac{1}{2n(2n+1)}$이다. 즉, $p_x=\frac{1}{n(2n+1)}x,\ x=1,2,3,\cdots,2n.$

이제 <나>에 있는 기댓값의 정의에 의하여

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{x=1}^{2n}xp_x=\frac{1}{n(2n+1)}\sum_{x=1}^{2n}x^2=\frac{1}{n(2n+1)}\cdot\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}=\frac{4n+1}{3}$$

[끝]

이 면은 여백입니다.