자연 (오전)

2019학년도 신입학 수시
논술 전형

성명		지원 학부·학과		수험 번호	

- 답안지와 문제지에 성명, 지원 학부·학과, 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지에 정답 외에는 어떠한 표시도 하지 마시오.
- 90분 안에 답안을 작성하시오.
- 고사 종료 후 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.
- 진행을 위한 감독자의 지시에 응하지 않을 시 퇴실 요구를 받을 수 있습니다.

유의 사항

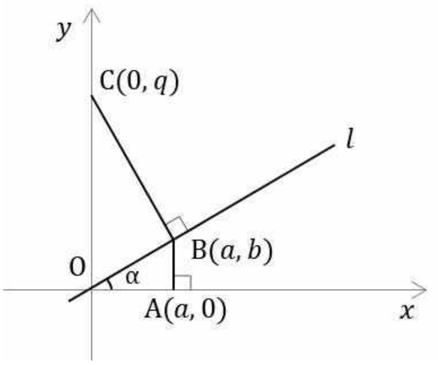
1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로만 작성하시오.
   (빨간색이나 파란색 등 사용 금지)
2. 답안지 수정 시에는 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나, 가로로 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재작성 하시오.(수정테이프, 수정액 사용 불가)
3. 본 고사의 답안은 1매 이내에 작성을 해야 하며, 답안지 교체는 가능하나 기존 답안지 제출은 절대 불가합니다.
4. 답안지 교체로 인한 책임(시간 부족 등)은 요청한 수험생에게 있습니다.
5. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안을 검정색 펜으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내거나 답안과 관련 없는 표현이나 표기를 한 경우
   3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우
   4) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우

※ 감독의 지시가 있을 때까지 다음 장으로 넘기지 마시오.

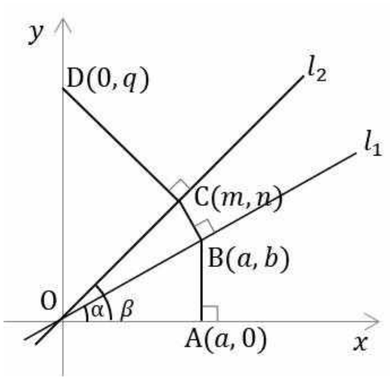
이 면은 여백입니다.

[문제 1] 다음 제시문 <가>와 <나>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> x축 위의 한 점 $\mathrm{A}(a,0)$에서의 수선과 원점을 지나는 직선 ℓ의 교점을 $\mathrm{B}(a,b)$라 하고, 점 B를 지나는 수선이 y축과 만나는 교점을 $\mathrm{C}(0,q)$라 하자. (단, $a>0$, $0<b<q$)



<나> 원점을 지나는 두 직선 ℓ_1, ℓ_2가 그림과 같고, x축 위의 점 A에서의 수선과 ℓ_1의 교점을 B, 점 B에서의 수선과 ℓ_2의 교점을 C, 점 C에서의 수선과 y축의 교점을 D라 하자. (단, $0<m<a$, $0<b<n<q$)



1-1. 제시문 <가>에서 $\frac{q}{a}$를 점 B의 좌표 a, b로 나타내고 $\frac{q}{a}$의 최솟값을 구하시오. [10점]

[풀이]

그림에서 벡터 $\overrightarrow{CB} = (a, b-q)$ 와 벡터 $\overrightarrow{OB} = (a, b)$는 수직이므로
$0 = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{OB} = a^2 + (b-q)b$.
따라서, $bq = a^2 + b^2$이고
$\frac{q}{a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.
(또는, $q = \overline{OB}\operatorname{cosec}\alpha = \overline{OA}\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha = a\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ 이므로 $\frac{q}{a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.)
따라서 $x = \frac{a}{b}$로 놓으면 $\frac{q}{a} = x + \frac{1}{x}$이고
$x = 1$, 즉 $a = b$일 때 최소가 되며 최솟값 2를 갖는다.

1-2. 제시문 <나>에서 식 $nq = m^2 + n^2$과 식 $am + bn = a^2 + b^2$이 성립함을 보이고, a, b, m, n이 자연수일 때 두 선분의 길이의 비 $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{OB}}}$가 유리수임을 보이시오. [15점]

[풀이]

그림에서 벡터 $\overrightarrow{DC} = (m, n-q)$ 와 벡터 $\overrightarrow{OC} = (m, n)$는 수직이므로
$0 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OC} = m^2 + (n-q)n$.
따라서, $nq = m^2 + n^2$.
그리고 $\overrightarrow{CB} = (a-m, b-n)$ 과 $\overrightarrow{OB} = (a, b)$는 수직이므로
$0 = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{OB} = (a-m)a + (b-n)b$.
따라서 $am + bn = a^2 + b^2$.
a, b, m, n이 자연수이면 $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ 와 $\tan\beta = \frac{n}{m}$은 유리수이다.
그러므로, 탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하면
$\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{n}{m} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}\frac{n}{m}}$ 도 유리수임을 알 수 있다.

[뒷면에 계속]

1-3. 제시문 <나>에서 $q=5$일 때, 점 B와 점 C의 좌표들을 모두 구하고, 이때 $\frac{q}{a}$의 값을 구하시오.
(단, a, b, m, n은 모두 자연수) [10점]

[풀이]

문제 1-2의 식에 $q=5$를 대입하면,
(i) $m^2+n^2=5n$.
따라서 $\frac{m^2}{n}+n=5$ 이므로 $m^2=nk$ (k는 자연수)일 때 해가 존재하며 $n=5-k$이다.
$k=2, 3$일 때 $m^2=2\cdot 3=6$이므로 자연수 m인 해는 없다.
$k=1$과 $k=4$이면 두 개의 해 $(m, n)=(2, 4)$ 또는 $(2, 1)$이 존재하는데,
이 가운데 $(m, n)=(2, 1)$은 점 B의 해가 존재할 수 없기 때문에 $(m, n)=(2, 4)$가 해가 된다.

(ii) $(m, n)=(2, 4)$이면 $2a+4b=a^2+b^2$.
따라서 $(a-1)^2+(b-2)^2=5$.
a, b의 자연수 해는 $a-1=2$, $b-2=\pm 1$을 만족하는 경우이다.
$a=3$이며, $b=3$ 또는 $b=1$.
점 B의 좌표는 $(a, b)=(3, 3)$과 $(a, b)=(3, 1)$이 된다.
이때, $q=5$이고 $a=3$ 이므로
$\frac{q}{a}=\frac{5}{3}$.

[뒷면에 계속]

[문제 2] 다음 제시문 <가>와 <나>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u), u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$도 미분가능하며 그 도함수는

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

<나> 정적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x) \quad (\text{단, } a<x<b)$$

2-1. 함수 $f(x)=\int_0^x(1-\cos t)\,dt\ (0<x<2\pi)$에 대하여 함수 $g(x)$가 $g(f(x))=\ln\sqrt{1+x^2}\ (0<x<2\pi)$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\pi}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}$의 값을 구하시오. [15점]

[풀이]

제시문 <가>의 합성함수의 미분법에 의해

$\{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)$이고 조건 $g(f(x))=\ln\sqrt{1+x^2}$에 의해 $\{g(f(x))\}'=\frac{\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{1+x^2}$이다. $\lim_{x\to\pi}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}=g'(\pi)$이고 $f(\pi)=\int_0^\pi(1-\cos t)\,dt=[t-\sin t]_0^\pi=\pi$이다. 또한 제시문 <나>의 정적분과 미분과의 관계에 의해 $f'(x)=1-\cos x$이므로 $f'(\pi)=2$이다. 따라서 $g'(\pi)f'(\pi)=2g'(\pi)$이고 $g'(f(x))f'(x)=\frac{x}{1+x^2}$이므로 구하는 값은 $\frac{\pi}{2+2\pi^2}$이다.

2-2. 함수 $f(x)=(x-1)^3\cos(\pi x)$에 대하여 $\int_0^2 f(x)\,dx$의 값을 구하고, 이를 이용하여 $\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{\sin\pi x}\int_0^{2+x}f(t)\,dt\right\}$의 값을 구하시오. [15점]

[풀이]

$\int_0^2(x-1)^3\cos(\pi x)\,dx=\int_{-1}^1-x^3\cos(\pi x)\,dx$이고 $y=x^3\cos(\pi x)$가 원점대칭인 함수이므로 $\int_0^2(x-1)^3\cos(\pi x)\,dx=0$이다.

따라서, $\frac{1}{\sin\pi x}\int_0^{2+x}(t-1)^3\cos(\pi t)\,dt=\frac{1}{\frac{\sin\pi x}{x}}\frac{\int_0^{2+x}(t-1)^3\cos(\pi t)\,dt-\int_0^2(t-1)^3\cos(\pi t)\,dt}{x}$이다.

그리고 $\sin 0=0$이고 $(\sin x)'=\cos x$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{\sin\pi x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\pi x-\sin\pi 0}{x}=\pi\cos 0=\pi$이다. 또한 제시문 <나>의 정적분과 미분의 관계에 의해 $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{2+x}(t-1)^3\cos(\pi t)\,dt-\int_0^2(t-1)^3\cos(\pi t)\,dt}{x}=\cos 2\pi=1$이다. 따라서 구하는 값은 $\frac{1}{\pi}$이다.

[뒷면에 계속]

[문제 3] 다음 제시문 <가>~<라>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 다음과 같은 집합이 주어진다.

$$A_1 = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$$
$$A_2 = \{1, 2, 3, \cdots, 2m\}$$
$$A_3 = \{1, 2, 3, \cdots, 3m\}$$
$$\vdots$$
$$A_{12} = \{1, 2, 3, \cdots, 12m\}$$

(단, m은 1보다 큰 자연수)

<나> A_i에서 A_{i+1}로의 함수 $f_i : A_i \to A_{i+1}$의 개수는 $h_i(m)$이다.

<다> A_i에서 A_{i+1}로의 함수 $f_i : A_i \to A_{i+1}$ 중에서 '$k \in A_i$, $l \in A_i$이고 $k < l$이면 $f_i(k) < f_i(l)$이다'를 만족하는 것의 개수는 $r_i(m)$이다. (예를 들면, $r_3(m)$은 A_3에서 A_4로의 함수 $f_3 : A_3 \to A_4$ 중에서 '$k \in A_3$, $l \in A_3$이고 $k < l$이면 $f_3(k) < f_3(l)$이다'를 만족하는 것의 개수이다.)

<라> A_i에서 A_{i+2}로의 함수 $g_i : A_i \to A_{i+2}$ 중에서 '$k \in A_i$, $l \in A_i$이고 $k < l$이면 $g_i(k) < g_i(l)$이다'를 만족하는 것의 개수는 $s_i(m)$이다. (예를 들면, $s_3(m)$은 A_3에서 A_5로의 함수 $g_3 : A_3 \to A_5$ 중에서 '$k \in A_3$, $l \in A_3$이고 $k < l$이면 $g_3(k) < g_3(l)$이다'를 만족하는 것의 개수이다.)

3-1. $h_1(m)$, $r_1(m)$, $s_1(m)$에 대하여 다음을 구하시오. [15점]

$$\lim_{m \to \infty} \frac{(2m)^{m-1}}{h_1(m)} \ln \frac{s_1(m)}{r_1(m)}$$

[풀이]

$$\frac{s_1(m)}{r_1(m)} = \frac{{}_{3m}C_m}{{}_{2m}C_m} = \frac{\dfrac{(3m)!}{m!(2m)!}}{\dfrac{(2m)!}{m!m!}} = \frac{(2m+1)(2m+2)\cdots(2m+m)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+m)}$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{s_1(m)}{r_1(m)} = \ln \frac{{}_{3m}C_m}{{}_{2m}C_m} &= \sum_{k=1}^{m} \ln(2m+k) - \sum_{k=1}^{m} \ln(m+k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \ln m\left(2+\frac{k}{m}\right) - \sum_{k=1}^{m} \ln m\left(1+\frac{k}{m}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \ln\left(2+\frac{k}{m}\right) - \sum_{k=1}^{m} \ln\left(1+\frac{k}{m}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{(2m)^{m-1}}{h_1(m)} \ln \frac{s_1(m)}{r_1(m)} = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2m}\left(\sum_{k=1}^{m} \ln\left(2+\frac{k}{m}\right) - \sum_{k=1}^{m} \ln\left(1+\frac{k}{m}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[\int_2^3 \ln x\, dx - \int_1^2 \ln x\, dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}[3\ln 3 - 4\ln 2]$$

[뒷면에 계속]

3-2. 다음을 구하시오. [20점]

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(2m)^{m-1}}{h_1(m)}\ln\frac{s_1(m)\,s_2(m)\,\cdots\,s_{10}(m)}{r_1(m)\,r_2(m)\cdots r_{10}(m)}$$

[풀이]

$$\frac{s_2(m)}{r_2(m)}=\frac{{}_{4m}C_{2m}}{{}_{3m}C_{2m}}=\frac{\dfrac{(4m)!}{2m!(2m)!}}{\dfrac{(3m)!}{(2m)!m!}}=\frac{(2m+1)\cdots(2m+2m)}{(m+1)\cdots(m+2m)}$$

$$\ln\frac{s_2(m)}{r_2(m)}=\ln\frac{{}_{4m}C_{2m}}{{}_{3m}C_{2m}}=\sum_{k=1}^{2m}\ln(2m+k)-\sum_{k=1}^{2m}\ln(m+k)$$
$$=\sum_{k=1}^{2m}\ln\left(2+\frac{k}{m}\right)-\sum_{k=1}^{2m}\ln\left(1+\frac{k}{m}\right)$$

$$\frac{s_3(m)}{r_3(m)}=\frac{{}_{5m}C_{3m}}{{}_{4m}C_{3m}}=\frac{\dfrac{(5m)!}{3m!(2m)!}}{\dfrac{(4m)!}{(3m)!m!}}=\frac{(2m+1)\cdots(2m+3m)}{(m+1)\cdots(m+3m)}$$

$$\ln\frac{s_3(m)}{r_3(m)}=\ln\frac{{}_{5m}C_{3m}}{{}_{4m}C_{3m}}=\sum_{k=1}^{3m}\ln\left(2+\frac{k}{m}\right)-\sum_{k=1}^{3m}\ln\left(1+\frac{k}{m}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{s_{10}(m)}{r_{10}(m)}=\frac{{}_{12m}C_{10m}}{{}_{11m}C_{10m}}=\frac{\dfrac{(12m)!}{10m!(2m)!}}{\dfrac{(11m)!}{(10m)!m!}}=\frac{(2m+1)\cdots(2m+10m)}{(m+1)\cdots(m+10m)}$$

$$\ln\frac{s_{10}(m)}{r_{10}(m)}=\ln\frac{{}_{12m}C_{10m}}{{}_{11m}C_{10m}}=\sum_{k=1}^{10m}\ln\left(2+\frac{k}{m}\right)-\sum_{k=1}^{10m}\ln\left(1+\frac{k}{m}\right)$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(2m)^{m-1}}{h_1(m)}\ln\frac{s_1(m)\cdots s_{10}(m)}{r_1(m)\cdots r_{10}(m)}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_2^3\ln x\,dx-\int_1^2\ln x\,dx+\int_2^4\ln x\,dx-\int_1^3\ln x\,dx+\int_2^5\ln x\,dx-\int_1^4\ln x\,dx+\cdots+\int_2^{11}\ln x\,dx-\int_1^{10}\ln x\,dx\right.$$
$$\left.+\int_2^{12}\ln x\,dx-\int_1^{11}\ln x\,dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_2^3\ln x\,dx-\int_1^2\ln x\,dx+\int_3^4\ln x\,dx-\int_1^2\ln x\,dx+\cdots+\int_{11}^{12}\ln x\,dx-\int_1^2\ln x\,dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_2^{12}\ln x\,dx-10\int_1^2\ln x\,dx\right]$$
$$=6\ln 3+\ln 2$$

[끝]

이 면은 여백입니다.