자연

2019학년도 신입학 전형 수시
모의논술

성명		지원 학부·학과		수험 번호	

· 답안지와 문제지에 성명, 지원 학부·학과, 수험 번호를 정확히 기입하시오.
· 답안지에 정답 외에는 어떠한 표시도 하지 마시오.
· 90분 안에 답안을 작성하시오.
· 고사 종료 후 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.
· 진행을 위한 감독자의 지시에 응하지 않을 시 퇴실 요구를 받을 수 있습니다.

유의 사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로만 작성하시오.
(빨간색이나 파란색 등 사용 금지)
2. 답안지 수정 시에는 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나, 가로로 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재작성 하시오.(수정테이프, 수정액 사용 불가)
3. 본 고사의 답안은 1매 이내에 작성을 해야 하며, 답안지 교체는 가능하나 기존 답안지 제출은 절대 불가합니다.
4. 답안지 교체로 인한 책임(시간 부족 등)은 요청한 수험생에게 있습니다.
5. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안을 검정색 펜으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내거나 답안과 관련 없는 표현이나 표기를 한 경우
   3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우
   4) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우

※ 감독의 지시가 있을 때까지 다음 장으로 넘기지 마시오.

[문제 1] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 두 사건 A, B에 대하여 $0 < \mathrm{P}(B) < 1$일 때, 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(A|B^c)$$

여기서 $\mathrm{P}(A|B)$는 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률이고, B^c는 B의 여사건이다.

<나> 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$에 대하여 $D = b^2 - 4ac$라 할 때,
(1) $D > 0$ 이면 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(2) $D = 0$ 이면 서로 같은 두 실근(중근)을 갖는다.
(3) $D < 0$ 이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

<다> 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$의 두 근의 합은 $-\dfrac{b}{a}$이며 두 근의 곱은 $\dfrac{c}{a}$이다.

1-1. 주사위 A를 던졌을 때 나오는 숫자를 a, 주사위 B를 던졌을 때 나오는 숫자를 b라고 하자. 한편, 또 다른 주사위 한 개를 던져 2 이하의 숫자가 나왔을 경우 $c = -1$이고, 3 이상의 숫자가 나왔을 경우 $c = 0$이라 하자. 이 세 개의 주사위를 동시에 던져서 포물선 $y = ax^2 + bx + c$의 계수 a, b, c를 결정한다. 제시문 <가>를 이용하여 이 포물선이 점 $(1, 4)$를 지나는 확률을 구하시오. [10점]

[풀이] 사건 A는 포물선이 점 $(1, 4)$를 지나는 사건, 사건 B는 $c = -1$인 사건, 사건 B의 여사건 B^c는 $c = 0$인 사건이라 하자. 이 경우 $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B^c) = \dfrac{2}{3}$ 이고 $\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A \cap B)$, $\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(A|B^c) = \mathrm{P}(A \cap B^c)$ 이다.

사건 $A \cap B$는 $c = -1$이고 이때 $y = ax^2 + bx + c$이 점 $(1, 4)$를 지나는 사건이다. 따라서 확률 $\mathrm{P}(A \cap B)$는 주사위 한 개를 던져 2 이하의 숫자가 나오고 주사위 A의 눈이 a, 주사위 B의 눈이 b라 할 때 $a + b = 5$일 확률이다. 결국 $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{27}$이다.

사건 $A \cap B^c$는 $c = 0$이고 이때 $y = ax^2 + bx + c$이 점 $(1, 4)$를 지나는 사건이다. 따라서 확률 $\mathrm{P}(A \cap B^c)$는 주사위 한 개를 던져 3 이상의 숫자가 나오고 주사위 A의 눈이 a, 주사위 B의 눈이 b라 할 때 $a + b = 4$일 확률이다. 결국 $\mathrm{P}(A \cap B^c) = \dfrac{1}{18}$이다.

그러므로 포물선이 점 $(1, 4)$를 지나는 확률 $\mathrm{P}(A)$는 $P(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ 이므로 $\dfrac{5}{54}$이다.

[뒷면에 계속]

1-2. 문제 1-1과 같이 두 개의 주사위 A와 B를 동시에 던져 나오는 눈의 수를 각각 a와 b라 하자. 이때, 이차방정식 $x^2-2bx+a=0$이 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차방정식 $x^2-bx+a=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 확률을 구하시오. [15점]

[풀이] 이차방정식 $x^2-2bx+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은 $b^2-a>0$이고, 이차방정식 $x^2-bx+a=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 조건은 $b^2-4a<0$이다. 그러므로 이차방정식 $x^2-2bx+a=0$이 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차방정식 $x^2-bx+a=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 조건은 $a<b^2<4a$ 이다. 이 조건을 만족하는 주사위의 눈의 수 a와 b의 쌍 (a,b)는 $(2,2), (3,2), (3,3), (4,3), (5,3), (5,4), (6,3), (6,4)$로 총 8가지이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$이다.

1-3. 문제 1-1과 같이 두 개의 주사위 A와 B를 동시에 던져 나오는 눈의 수를 각각 a와 b라 하자. 이차방정식 $x^2-bx+a=0$가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 두 실근이 모두 정수일 확률을 구하시오. [15점]

[풀이] 사건 A는 $x^2-bx+a=0$가 서로 다른 두 실근을 가지는 사건, 사건 B는 $x^2-bx+a=0$가 서로 다른 두 정수근을 가지는 사건이라 하자. 이 경우 사건 B는 사건 A의 부분 사건이다.
따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}$ 이다.
$x^2-bx+a=0$가 서로 다른 두 실근을 가지는 필요충분조건은 $b^2-4a>0$ 이고,
이 조건을 만족하는 주사위의 눈의 수 a와 b의 쌍 (a,b)는
$(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)$으로 총 17가지이다. 그러므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{17}{36}$이다.
이 중 $\frac{b-\sqrt{b^2-4a}}{2}$와 $\frac{b+\sqrt{b^2-4a}}{2}$가 모두 정수인 경우는 $(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,5)$로 총 5가지이다.
따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{36}$이다. 결국 구하는 확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}$이므로 $\frac{5}{17}$이다.

[문제 2] 다음 제시문 <가>와 <나>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 임의의 함수 $h(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c h(x)dx + \int_c^b h(x)dx = \int_a^b h(x)dx$$

<나> 닫힌구간 $[0,1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음을 만족시킨다.

$$f'(x) > 0 \quad (0 < x < 1), \qquad \int_0^1 f(x)dx = \sqrt{2}, \qquad \int_0^1 |f(x)|dx = \sqrt{5}$$

이 때, 함수 $F(x)$와 $G(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad (0 \le x \le 1)$$

$$G(x) = \int_0^x |f(t)|dt \quad (0 \le x \le 1)$$

2-1. 제시문 <나>의 함수 $f(x)$와 $F(x)$에 대하여 $\int_0^1 f(x)|F(x)|dx$ 의 값을 구하시오. [15점]

[풀이] $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$는 증가함수이다. 그러므로 $\int_0^b f(x)dx = 0$인 b가 단 하나있다.

따라서 $F(x) < 0$ $(0 < x < b)$이고 $F(x) > 0$ $(b < x < 1)$이므로 다음 식을 얻는다.

$$\int_0^1 f(x)|F(x)|dx = -\int_0^b f(x)F(x)dx + \int_b^1 f(x)F(x)dx$$

이 때, $F'(x) = f(x)$ 이므로 $-\int_0^b f(x)F(x)dx + \int_b^1 f(x)F(x)dx = -\left[\frac{F^2(x)}{2}\right]_0^b + \left[\frac{F^2(x)}{2}\right]_b^1$ 이다.

결국 $F(1) = \int_0^1 f(t)dt = \sqrt{2}$ 이므로 $\int_0^1 f(x)|F(x)|dx = \frac{F^2(1)}{2} + \frac{F^2(0)}{2} = 1$ 이다.

2-2. 제시문 <나>의 함수 $f(x)$와 $G(x)$에 대하여 $\int_0^1 f(x)e^{G(x)}dx$ 의 값을 구하시오. [15점]

[풀이] $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$는 증가함수이다. 그러므로 $f(a) = 0$인 a가 단 하나있다.
따라서 $f(x) < 0$ $(0 < x < a)$이고 $f(x) > 0$ $(a < x < 1)$이다.
또한 $G'(x) = |f(x)|$이므로 $G'(x) = -f(x)$ $(0 \le x \le a)$, $G'(x) = f(x)$ $(a \le x \le 1)$ 이다.

그러므로 $\int_0^1 f(x)e^{G(x)}dx = \int_0^a f(x)e^{G(x)}dx + \int_a^1 f(x)e^{G(x)}dx = [-e^{G(x)}]_0^a + [e^{G(x)}]_a^1 = e^{G(1)} + e^{G(0)} - 2e^{G(a)}$ 이다.

그런데 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx = \sqrt{2}$ 이고 $\int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^a -f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx = \sqrt{5}$

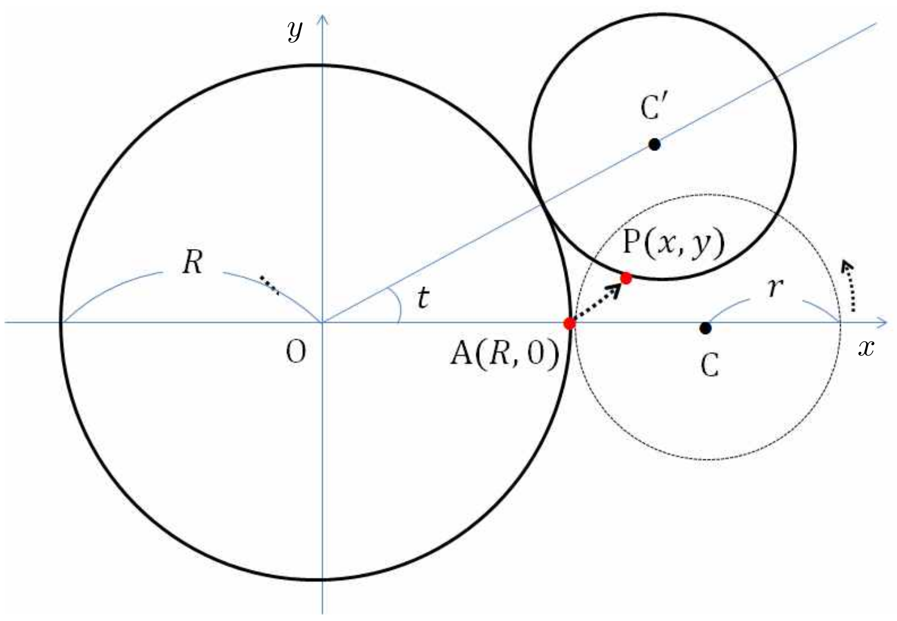
이므로 $G(a) = \int_0^a -f(x)dx = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2}$ 이다.

결국 $\int_0^1 f(x)e^{G(x)}dx = e^{G(1)} + e^{G(0)} - 2e^{G(a)} = e^{\sqrt{5}} + 1 - 2e^{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}}$ 이다.

[문제 3] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 아래 그림과 같이 중심이 원점에 있고 반지름의 길이가 R인 원 O와 반지름의 길이가 r인 원 C는 x축 위의 점 $\mathrm{A}(R,0)$에서 접한다. 원 O는 고정시키고, 원 C를 원 O의 둘레를 따라 시계반대 방향으로 미끄러짐 없이 굴린다고 하자. 원 C 위의 한 고정점 $\mathrm{P}(x,y)$는 시각 $t=0$일 때 점 $\mathrm{A}(R,0)$에서 출발하여 시각 t에서의 위치가 다음과 같다.

$$x(t)=(R+r)\cos t-r\cos\left(\frac{R+r}{r}\right)t,\qquad y(t)=(R+r)\sin t-r\sin\left(\frac{R+r}{r}\right)t$$



<나> 시각 t에서의 점 P의 속도는 벡터 $\vec{v}(t)=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$이고, 속도의 크기 $|\vec{v}(t)|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$를 속력이라 한다.

<다> 삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,\ \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,\ \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

[뒷면에 계속]

3−1. $R=3,\ r=2$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도와 속력을 구하고, 속력이 0이 되는 모든 점 P의 좌표 (x,y)를 구하시오. [15점]

[풀이] 점 P의 시각 t에서의 위치는 $x(t)=5\cos t-2\cos\frac{5t}{2},\ y(t)=5\sin t-2\sin\frac{5t}{2}$이므로

점 P의 시각 t에서의 속도는 $\vec{v}(t)=\left(-5\sin t+5\sin\frac{5t}{2},\ 5\cos t-5\cos\frac{5t}{2}\right)$이고

점 P의 시각 t에서의 속력 $|\vec{v}(t)|$는 다음과 같다.

$$\sqrt{(-5\sin t+5\sin\frac{5t}{2})^2+(5\cos t-5\cos\frac{5t}{2})^2}=5\sqrt{\sin^2 t-2\sin t\sin\frac{5t}{2}+\sin^2\frac{5t}{2}+\cos^2 t-2\cos t\cos\frac{5t}{2}+\cos^2\frac{5t}{2}}$$

$$=5\sqrt{2-2\cos(\frac{5t}{2}-t)}=5\sqrt{2-2\cos\frac{3t}{2}}.$$

따라서 $|\vec{v}(t)|=0$인 t는 $0,\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ \cdots$이고 점 P의 좌표 (x,y)는 $(3,0),(\frac{-3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}),(\frac{-3}{2},\frac{-3\sqrt{3}}{2})$이다.

3−2. 제시문 <가>에서와 같이 원 O의 반지름의 길이를 R이라 하고, 원 O의 둘레를 구르는 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이 r을 각각 $\frac{1}{12}R$과 $\frac{1}{20}R$이라 하자. 원 C_1과 C_2 위의 각 고정점을 P_1과 P_2라 하고 시각 $t=0$에 x축 위의 점 $A(R,0)$에서 출발한다. 두 원 C_1, C_2가 원 O의 둘레를 구르면서 움직이는 점 P_1, P_2가 특정 시각에 원 O와 만난다. 움직이는 두 점 P_1과 P_2가 만나는 원 O 위의 모든 점의 개수를 구하고, 움직이는 두 점 P_1과 P_2가 원 O 위에서 공통으로 만나는 모든 시각 $t\ (0\le t<2\pi)$를 구하시오. [15점]

[풀이] 반지름의 길이가 $\frac{1}{12}R$인 원 C_1가 원 O의 둘레를 구르면서 움직인다. $t=0$에서 원 O와 만나는 점 P_1이 원 O의 둘레를 구르다가 원 O와 만나는 t는 $\frac{n\pi}{6}\ (n=0,1,2,\cdots)$ 이다. 따라서 점 P_1이 만나는 원 O 위의 모든 점을 $t(0\le t<2\pi)$로 나타내면 $t=\frac{n\pi}{6}\ (n=0,1,\cdots,11)$ 이다. 결국 점 P_1이 만나는 원 O 위의 점의 개수는 12이다.

이와 유사하게 반지름의 길이가 $\frac{1}{20}R$인 원 C_2가 원 O의 둘레를 구르면서 움직인다고 하자. $t=0$에서 원 O와 만나는 원 C_2 위의 점 P_2이 원 O의 둘레를 구르다가 원 O와 만나는 t는 $\frac{n\pi}{10}\ (n=0,1,2,\cdots)$ 이다. 따라서 점 P_2이 만나는 원 O 위의 모든 점을 $t(0\le t<2\pi)$로 나타내면 $t=\frac{n\pi}{10}\ (n=0,1,\cdots,19)$ 이다. 결국 점 P_2가 만나는 원 O 위의 점의 개수는 20이다.

$\frac{n\pi}{6}\ (n=0,1,\cdots,11)$와 $\frac{n\pi}{10}\ (n=0,1,\cdots,19)$에서 공통으로 나타나는 t의 값은 $\frac{n\pi}{2}\ (n=0,1,2,3)$로 4개 이다. 따라서 점 P_1과 P_2이 만나는 원 O 위의 모든 점의 개수는 $12+20-4=28$이고, P_1과 P_2가 공통으로 만나는 원 O 위의 점을 $t\ (0\le t<2\pi)$로 나타내면 $t=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$이다.

이 면은 여백입니다.