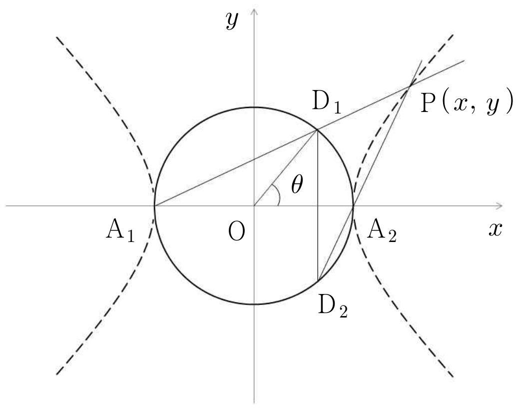
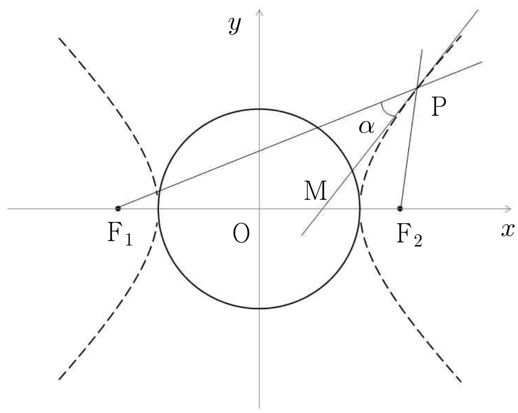
[자연계 오후 문제1]

[문제 1] 다음 제시문 <가>와 <나>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 아래 [그림 1]과 같이 반지름의 길이가 r인 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 임의의 점 D_1에서 y축에 평행하게 그은 직선이 원과 만나는 다른 점을 D_2라 하자. 원과 x축과의 두 교점을 $\mathrm{A}_1(-r,0)$과 $\mathrm{A}_2(r,0)$이라 하고, 직선 $\mathrm{A}_1\mathrm{D}_1$과 $\mathrm{A}_2\mathrm{D}_2$가 점 $\mathrm{P}(x,y)$에서 만난다. 이때, $\angle \mathrm{D}_1\mathrm{O}\mathrm{A}_2=\theta$이다. 점 $\mathrm{P}(x,y)$가 그리는 곡선은 [그림 2]와 같이 초점이 $\mathrm{F}_1(-c,0)$과 $\mathrm{F}_2(c,0)$인 쌍곡선이다. 점 P에서 쌍곡선에 접하는 접선이 x축과 만나는 점을 M이라 하고, $\angle \mathrm{F}_1\mathrm{PM}=\alpha$라 하자. (단, $c=\sqrt{2}r$)



[그림 1]



[그림 2]

<나> 탄젠트함수의 덧셈정리

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

1-1. 직선 $\mathrm{A}_1\mathrm{D}_1$의 방정식, $\mathrm{A}_2\mathrm{D}_2$의 방정식, 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 각각 [그림 1]의 θ로 나타내어라. **[10점]**

1-2. [그림 2]의 직선 PF_1, PM의 기울기를 각각 [그림 1]의 θ로 나타내어라. **[15점]**

1-3. [그림 2]의 $\tan\alpha$를 [그림 1]의 θ로 나타내어라. **[15점]**

출제 의도

(1) 주어진 두 점을 지나는 직선을 구할 수 있는지, 점 P를 매개변수로 나타낼 수 있는지,
(2) 직선의 기울기를 찾고, 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 계산할 수 있는지,
(3) 삼각함수 덧셈정리를 적용시킬 수 있는지
를 평가하는 위해 출제된 문제이다. 아울러 문항의 답을 찾기 위하여 제시문을 활용하여 답안을 논리적으로 작성하는지 평가하고자 한다.

채점 기준 및 예시 답안

1-1.

직선 A_1D_1 는 $A_1(-r, 0)$ 와 $D_1(r\cos\theta, r\sin\theta)$를 지나는 직선의 식 :

$$y = \frac{\sin\theta}{(\cos\theta+1)}(x+r)$$

직선 A_2D_2 는 $A_2(r, 0)$ 와 $D_2(r\cos\theta, -r\sin\theta)$를 지나는 직선의 식 :

$$y = \frac{-\sin\theta}{(\cos\theta-1)}(x-r)$$

두 직선의 교점은 $\frac{\sin\theta}{(\cos\theta+1)}(x+r) = \frac{-\sin\theta}{(\cos\theta-1)}(x-r)$ 이므로

점 $P(x,y)$를 각각 나타내면,

$$x = r\sec\theta$$
$$y = r\tan\theta$$

1-1 **[풀이 2]** 원주각과 중심각의 관계에 의하여 $\angle D_1A_1A_2 = \frac{\theta}{2}$ 이므로,

직선 A_1D_1의 방정식은 $y = \tan\frac{\theta}{2}(x+r)$ 이다.

한 호의 원주각의 크기가 같으므로, $\angle D_1D_{2_1}A_2 = \frac{\theta}{2}$ 이고,

직선 A_2D_2 과 x 축이 이루는 각은 $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ 이므로,

직선 A_2D_2의 방정식은 $y = \cot\frac{\theta}{2}(x-r)$ 이다.

두 직선의 교점은 $\tan\frac{\theta}{2}(x+r) = \cot\frac{\theta}{2}(x-r)$ 이므로,

점 $P(x,y)$를 각각 나타내면,

$$x = r\sec\theta$$
$$y = r\tan\theta$$

1-2.

$c=\sqrt{2}r$ 이고, $F_1(-\sqrt{2}r,0)$, $P(r\sec\theta, r\tan\theta)$ 이므로,

$\angle \mathrm{PF_1M}=t_1$, $\angle \mathrm{PMF_2}=t_2$ 라 할 때,

직선 $\mathrm{PF_1}$ 의 기울기 $\tan t_1 = \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta+\sqrt{2}} = \dfrac{\sin\theta}{1+\sqrt{2}\cos\theta}$ 이다.

직선 PM 의 기울기는 접선의 기울기 이므로

$$\tan t_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\sec^2\theta}{r\sec\theta\tan\theta} = \frac{\sec\theta}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$$

1-3.

$$\tan\alpha = \tan(t_1-t_2) = \frac{\tan t_1 - \tan t_2}{1+\tan t_1 \tan t_2} = \frac{\dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{1+\sqrt{2}\cos\theta}}{1+\dfrac{1}{\sin\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{1+\sqrt{2}\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\tan\theta}$$

[자연계 오후 문제2]

[문제 2] 다음 제시문 <가>와 <나>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 함수 $f(x)=\ln(x^2+x+1)$은 모든 실수에 대하여 미분가능하다.

<나> 함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차함수이다.

2-1. 제시문 <가>의 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{f'(-n)}+\frac{1}{f'(n)}-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하여라. **[15점]**

2-2. 함수 $h(x)=\{f(x)+g(x)\}^2$이 $x=1$에서 최솟값이 1일 때, 함수 $g(x)$를 구하여라. **[15점]**

출제 의도

(1) 로그함수 및 합성함수의 미분법 알고 있고, 이를 활용하여 급수의 합을 계산할 수 있는지,
(2) 주어진 합성함수의 미분과 최솟값을 구하는 과정을 통하여 함수 g(x) 를 유도할 수 있는지
를 평가하기 위하여 출제된 문제이다, 아울러 문항의 답을 찾기 위하여 제시문을 활용하는 답안을 논리적으로 작성하는지 평가하고자 한다.

채점 기준 및 예시 답안

2-1.

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow \frac{1}{f'(x)}=\frac{x^2+x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{x+\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\frac{1}{2x+1}$$

즉, $$\frac{1}{f'(-n)}+\frac{1}{f'(n)}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(-n+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\frac{1}{-2n+1}+\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{f'(-n)}+\frac{1}{f'(n)}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right\}$$
$$=-\frac{3}{4}$$

2-2.

우선 $g(x)=(x-1)^2+a(x-1)+b$ 라 놓는다.

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$, $g'(x)=2(x-1)+a$ 에서

$f(1)=\ln 3$, $f'(1)=1$, $g(1)=b$, $g'(1)=a$ 를 얻는다.

$h(x)=(f(x)+g(x))^2$ 의 최솟값이 0 이 아니므로 $f(x)+g(x)$ 는 항상 양의 값을 가지던지 음의 값을 갖는다.

그런데 $x\to\infty$ => $f(x)+g(x)\to\infty$ 이므로 $f(x)+g(x)$ 는 항상 양의 값을 갖는다.

$\therefore h(1)=1$ <=> $(f(1)+g(1))^2=1$ 이므로 $f(1)+g(1)=1$ 이다.

$\therefore b=g(1)=1-\ln 3$

$h(x)$ 가 $x=1$ 에서 최솟값을 가지므로

$h'(1)=2(f(1)+g(1))(f'(1)+g'(1))=0$ 이므로 $f'(1)+g'(1)=0$

$\therefore a=g'(1)=-1$

결국 $g(x)=(x-1)^2-(x-1)+(1-\ln 3)=x^2-3x+3-\ln 3$

[자연계 오후 문제3]

[문제 3] 다음 제시문 <가>와 <나>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 갑이 동전을 4개 던져서 나온 앞면의 개수를 a,
을이 동전을 2개 던져서 나온 앞면의 개수를 b,
병이 동전을 2개 던져서 나온 앞면의 개수를 c라 하자.

<나> 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) > 0)$$

3-1. $a \geq b$일 때, $a = n$일 확률 P_n을 각각 구하여라. (단, $n = 0, 1, 2, 3, 4$) **[15점]**

3-2. $a \geq b$일 때, $a \geq c$일 확률을 구하여라. **[15점]**

출제 의도

(1) 조건부확률의 개념을 알고 각각의 확률을 구할 수 있는지
(2) (1)에서 구한 확률을 토대로 a, b, c와 관계를 찾아 전체 확률을 계산할 수 있는지
를 평가하기 위하여 출제된 문제이다, 아울러 문항의 답을 찾기 위하여 제시문을 활용하는 답안을 논리적으로 작성하는지 평가하고자 한다.

채점 기준 및 예시 답안

3-1.

$a \geq b$일 때, $a = n$일 확률은 조건부확률

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}(a = n | a \geq b) = \frac{\mathrm{P}(a = n \cap a \geq b)}{\mathrm{P}(a \geq b)} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, 4) \quad \text{이다.}$$

그런데, $\mathrm{P}(a \geq b) = \sum_{n=0}^{4} \mathrm{P}(a = n \cap a \geq b)$ 이므로 각 항을 구하여 보면,

1) $\mathrm{P}(a = 0 \cap a \geq b) = \mathrm{P}(a = 0) \cdot \mathrm{P}(a \geq b | a = 0)$으로

$\mathrm{P}(a = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ 이고,

$a = 0$일 때 $a \geq b$이면, $b = 0$뿐 이므로

$\mathrm{P}(a \geq b | a = 0) = \mathrm{P}(b = 0) = \frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(a = 0 \cap a \geq b) = \frac{1}{64}$

2) $\mathrm{P}(a = 1 \cap a \geq b) = \mathrm{P}(a = 1) \cdot \mathrm{P}(a \geq b | a = 1)$으로

$\mathrm{P}(a=1) = {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$ 이고,

$a=1$일 때 $a \geq b$이면, $b=0$ 또는 1 이므로

$\mathrm{P}(a \geq b | a=1) = \frac{3}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(a=1 \cap a \geq b) = \frac{12}{64}$

3) $\mathrm{P}(a=2 \cap a \geq b) = \mathrm{P}(a=2) \cdot \mathrm{P}(a \geq b | a=2)$ 으로

$\mathrm{P}(a=2) = {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16}$ 이고,

$a=2$일 때 $a \geq b$이면, $b=0$ 또는 1 또는 2 이므로

$\mathrm{P}(a \geq b | a=2) = 1$

$\therefore \mathrm{P}(a=2 \cap a \geq b) = \frac{6}{16} = \frac{24}{64}$

4) $\mathrm{P}(a=3 \cap a \geq b) = \mathrm{P}(a=3) \cdot \mathrm{P}(a \geq b | a=3)$ 으로

$$= \mathrm{P}(a=3) \cdot 1$$
$$= {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} = \frac{16}{64}$$

$\therefore \mathrm{P}(a=3 \cap a \geq b) = \frac{4}{16} = \frac{16}{64}$

5) $\mathrm{P}(a=4 \cap a \geq b) = \mathrm{P}(a=4) \cdot 1$ 으로

$$= {}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = \frac{4}{64}$$

$\therefore \mathrm{P}(a=4 \cap a \geq b) = \frac{1}{16} = \frac{4}{64}$

따라서 $\mathrm{P}(a \geq b) = \frac{1}{64} + \frac{12}{64} + \frac{24}{64} + \frac{16}{64} + \frac{4}{64} = \frac{57}{64}$

그러므로 $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}(a=n | a \geq b) = \frac{\mathrm{P}(a=n \cap a \geq b)}{\mathrm{P}(a \geq b)}$ $(n=0, 1, 2, 3, 4)$은

다음과 같다.

$$\mathrm{P}_0 = \frac{1/64}{57/64} = \frac{1}{57}, \quad \mathrm{P}_1 = \frac{12/64}{57/64} = \frac{12}{57} = \frac{4}{19}$$
$$\mathrm{P}_2 = \frac{24/64}{57/64} = \frac{24}{57} = \frac{8}{19}, \quad \mathrm{P}_3 = \frac{16/64}{57/64} = \frac{16}{57}$$
$$\mathrm{P}_4 = \frac{4/64}{57/64} = \frac{4}{57}$$

[풀이2] 모든 경우의 수를 세는 경우도 인정! 64가지 중 색칠한 부분 제외하면 57가지

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">b / a</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>${}_2C_0 = 1$</td><td>${}_2C_1 = 2$</td><td>${}_2C_2 = 1$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>${}_4C_0 = 1$</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>${}_4C_1 = 4$</td><td>4</td><td>8</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>${}_4C_2 = 6$</td><td>6</td><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>${}_4C_3 = 4$</td><td>4</td><td>8</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>${}_4C_4 = 1$</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>

3-2.

$a \geq b$일 때, $a \geq c$일 확률은 조건부확률

$$\mathrm{P}(a \geq c | a \geq b) = \frac{\mathrm{P}(a \geq c \cap a \geq b)}{\mathrm{P}(a \geq b)}$$ 이다.

그런데, $\mathrm{P}(a \geq c \cap a \geq b) = \sum_{n=0}^{4} \mathrm{P}(a=n)\mathrm{P}(a \geq c \cap a \geq b | a=n)$ 이므로

$$\mathrm{P}(a \geq c | a \geq b) = \sum_{n=0}^{4} \frac{\mathrm{P}(a=n)\mathrm{P}(a \geq c \cap a \geq b | a=n)}{\mathrm{P}(a \geq b)}$$

$$= \sum_{n=0}^{4} \frac{\mathrm{P}(a=n)\mathrm{P}(a \geq b | a=n)\mathrm{P}(a \geq c | a=n)}{\mathrm{P}(a \geq b)} = \sum_{n=0}^{4} \mathrm{P}(a=n | a \geq b)\mathrm{P}(a \geq c | a=n).$$

문항 3-1에서 구한 $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}(a=n | a \geq b)$을 활용하면,

$$\mathrm{P}_0 = \frac{1/64}{57/64} = \frac{1}{57}, \quad \mathrm{P}_1 = \frac{12/64}{57/64} = \frac{12}{57} = \frac{4}{19}$$
$$\mathrm{P}_2 = \frac{24/64}{57/64} = \frac{24}{57} = \frac{8}{19}, \quad \mathrm{P}_3 = \frac{16/64}{57/64} = \frac{16}{57}$$
$$\mathrm{P}_4 = \frac{4/64}{57/64} = \frac{4}{57}$$

$a \geq b$일 때,

$a=0$ 일 확률이 $\frac{1}{57}$,

$a=1$ 일 확률이 $\frac{12}{57}$,

$a=2$ 일 확률이 $\frac{24}{57}$,

$a=3$ 일 확률이 $\frac{16}{57}$,

$a=4$ 일 확률이 $\frac{4}{57}$ 이다.

$a \ge b$일 때, $a \ge c$ 일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(a \ge c | a \ge b) = {} & \mathrm{P}(a=0 | a \ge b)\mathrm{P}(a \ge c | a=0) + \mathrm{P}(a=1 | a \ge b)\mathrm{P}(a \ge c | a=1) \\ & + \mathrm{P}(a=2 | a \ge b)\mathrm{P}(a \ge c | a=2) + \mathrm{P}(a=3 | a \ge b)\mathrm{P}(a \ge c | a=3) \\ & + \mathrm{P}(a=4 | a \ge b)\mathrm{P}(a \ge c | a=4)\end{aligned}$$

이다.

$$\mathrm{P}(a \ge c | a=0) = \mathrm{P}(0 \ge c) = \mathrm{P}(0=c) = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(a \ge c | a=1) = \mathrm{P}(1 \ge c) = \frac{3}{4}$$

$$\mathrm{P}(a \ge c | a=2) = \mathrm{P}(2 \ge c) = 1$$

$$\mathrm{P}(a \ge c | a=3) = P(a \ge c | a=4) = 1$$

그러므로, $\begin{aligned}\mathrm{P}(a \ge c | a \ge b) &= \frac{1}{57}\times\frac{1}{4}+\frac{12}{57}\times\frac{3}{4}+\frac{24}{57}\times 1+\frac{16}{57}\times 1+\frac{4}{57}\times 1 \\ &= \frac{1}{228}+\frac{36}{228}+\frac{176}{228} \\ &= \frac{213}{228}=\frac{71}{76}\end{aligned}$

[풀이2]

$a \ge b$일 때, $a \ge c$일 확률은 조건부확률

$$\mathrm{P}(a \ge c | a \ge b) = \frac{\mathrm{P}(a \ge c \cap a \ge b)}{\mathrm{P}(a \ge b)}$$ 이다.

그런데, $\mathrm{P}(a \ge c \cap a \ge b) = \sum_{n=0}^{4} \mathrm{P}(a=n)\mathrm{P}(a \ge c \cap a \ge b | a=n)$ 이므로

$\mathrm{P}(a=n)\mathrm{P}(a \ge c \cap a \ge b | a=n)$ 항을 각각 구하여 보면,

1) $n=0$ 일 때, $\frac{1}{16}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$,

2) $n=1$ 일 때, $\frac{4}{16}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{36}{256}=\frac{9}{64}$,

3) $n=2$ 일 때, $\frac{6}{16}\times\frac{4}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{96}{256}=\frac{3}{8}$,

4) $n=3$ 일 때, $\frac{4}{16}\times\frac{4}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{64}{256}=\frac{1}{4}$,

5) $n=4$ 일 때, $\frac{1}{16}\times\frac{4}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{16}{256}=\frac{1}{16}$ 이다.

그러므로, $\mathrm{P}(a \geq c \cap a \geq b)=\sum_{n=0}^{4}\mathrm{P}(a=n)\mathrm{P}(a \geq c \cap a \geq b|a=n)=\frac{213}{256}$ 이다.

$\therefore \mathrm{P}(a \geq c|a \geq b)=\frac{\mathrm{P}(a \geq c \cap a \geq b)}{\mathrm{P}(a \geq b)}=\frac{\frac{213}{256}}{\frac{57}{64}}=\frac{213}{228}=\frac{71}{76}$ 이다.

위 확률을 $16\times4\times4=256$ 가지 경우의 수 중, $1, 36, 96, 64, 16$으로 각각 세어 풀어도 같은 답을 얻을 수 있다.