[자연계 오전 문제1]

[문제 1] 다음 제시문 <가>와 <나>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 다음과 같은 다항식이 주어진다.

$$f_0(x) = 1$$
$$f_1(x) = 1 + x$$
$$f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$
$$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$
$$f_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$
$$f_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$
$$f_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

(단, $n!$은 1에서 n까지의 모든 자연수의 곱이다.)

<나> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, 즉

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

이면 $f(c) = 0$인 c가 $a < c < b$에 적어도 하나 존재한다.

1-1. 다항식 $f_5(x)$의 역함수가 존재할 때, $g_5(x) = f_5^{-1}(x)$라 하자.
즉, $g_5(f_5(x)) = x = f_5(g_5(x))$이다. $g_5{}'(1)$과 $g_5{}''(1)$을 각각 구하여라. **[10점]**

1-2. 다항식 $f_3(x)$의 역함수가 존재할 때, $g_3(x) = f_3^{-1}(x)$라 하자.
즉, $g_3(f_3(x)) = x = f_3(g_3(x))$이다. 정적분 $\int_1^{\frac{8}{3}} g_3(x)\,dx$의 값을 구하여라. **[15점]**

1-3. $f_5(x)$와 $f_6(x)$의 실근의 개수를 각각 구하여라. **[15점]**

출제 의도

(1) 역함수 관계에 있는 두 함수의 그래프의 특징을 이해하고, 이를 통하여 함수의 도함수와 그 역함수의 도함수 사이의 관계를 추측하고, 그래프를 이용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지.
(2) 역함수가 존재하는 함수의 도함수와 그 역함수의 도함수를 비교하여 역함수의 미분법을 이해하고 있는지.
(3) 사이값 정리는 실근이 존재함을 보일 수 있는 중요한 방법 중 하나임을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있는지.
를 평가하고자 하였다. 또한, 문항의 해결책을 찾기 위하여 제시문을 활용하여 논리적으로 작성하는지 평가하고자 하였다.

채점 기준 및 예시 답안

1-1.

$$g_5(f_5(x)) = x \Rightarrow g_5{}'(f_5(x))f_5{}'(x) = 1 \Rightarrow g_5{}'(f_5(x)) = \frac{1}{f_5{}'(x)} = \frac{1}{f_4(x)}$$

따라서 $g_5{}'(f_5(0)) = g_5{}'(1) = \dfrac{1}{f_5{}'(0)} = 1$

$g_5{}'(f_5(x)) = \dfrac{1}{f_5{}'(x)} \Rightarrow g_5{}''(f_5(x))f_5{}'(x) = -\dfrac{f_5{}''(x)}{[f_5{}'(x)]^2} = -\dfrac{f_3(x)}{[f_4(x)]^2}$ 이므로

$$g_n{}''(f_n(x)) = -\frac{1}{f_5{}'(x)} \cdot \frac{f_3(x)}{[f_4(x)]^2} = -\frac{f_3(x)}{f_4(x)[f_4(x)]^2}$$

$$g_5{}''(f_n(0)) = g_5{}''(1) = -1$$

[풀이2]

$$f_5(g_5(x)) = x \Rightarrow f_5{}'(g_5(x))g_5{}'(x) = 1 \Rightarrow g_5{}'(x) = \frac{1}{f_5{}'(g_5(x))}$$

즉, $g_5{}'(1) = \dfrac{1}{f_5{}'(g_5(1))} = \dfrac{1}{f_5{}'(0)} = 1$

$$g_5{}'(x) = \frac{1}{f_5{}'(g_5(x))} \Rightarrow g_5{}''(x) = \frac{-f_5{}''(g_5(x))\,g_5{}'(x)}{(f_5{}'(g_5(x))^2}$$

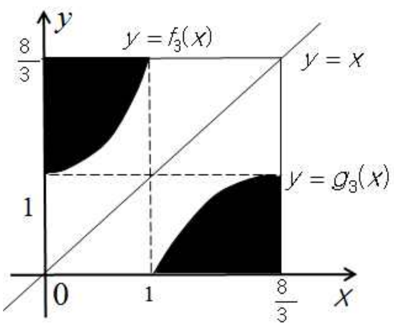
따라서 $g_5{}''(1) = \dfrac{-f_5{}''(g_5(1))\,g_5{}'(1)}{(f_5{}'(g_5(1))^2} = -1$

1-2.

$$\begin{cases} f_3(0) = 1+0+\dfrac{0^2}{2!}+\dfrac{0^3}{3!} = 1 \\ f_3(1) = 1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

서로 역함수 관계에 있는 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대칭이므로,

정적분 $\int_1^{\frac{8}{3}} g_3(x)\,dx$ 의 값을 구하는 것은 그림과 같이 구할 수 있다.



즉, $\int_1^{\frac{8}{3}} g_3(x)dx = \dfrac{8}{3} - \int_0^1 f_3(x)dx$ 이다.

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6})dx = \dfrac{41}{24}$ 이므로,

$\int_1^{\frac{8}{3}} g_3(x)dx = \dfrac{8}{3} - \int_0^1 f_3(x)dx = \dfrac{8}{3} - \dfrac{41}{24} = \dfrac{23}{24}$

[풀이2]

$$\begin{cases} f_3(0) = 1 + 0 + \dfrac{0^2}{2!} + \dfrac{0^3}{3!} = 1 \\ f_3(1) = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$\int_1^{\frac{8}{3}} g_3(x)dx$ 의 값을 구하자.

$g_3(x) = t$ 로 치환하면 $x = f_3(t)$ 이고, $\dfrac{dx}{dt} = f_3{}'(t)$ 이므로,

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{8}{3}} g_3(x)dx &= \int_0^1 t f_3{}'(t)\,dt \\ &= [t f_3(t)]_0^1 - \int_0^1 f_3(t)\,dt \\ &= f_3(1) - \int_0^1 f_3(t)\,dt \\ &= \frac{8}{3} - \int_0^1 f_3(t)\,dt \\ &= \frac{8}{3} - \int_0^1 (1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6})dt \\ &= \frac{8}{3} - \frac{41}{24} \\ &= \frac{23}{24} \end{aligned}$$

1-3.

$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$, $f_n{}'(x) = f_{n-1}(x)$, $f_1(x) = 1 + x$ 는 실근 1개를 가진다.

$f_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!}$ $\Rightarrow$ $f_2{}'(x) = 1 + x = f_1(x)$ 이므로 $f_2(x)$는 $x = -1$에서 최솟값

$f_2(-1) = \dfrac{1}{2} > 0$을 가진다.

따라서 $f_2(x) \geq f_2(-1) = \dfrac{1}{2} > 0$ 이므로 $f_2(x)$는 실근을 갖지 않는다.

$f_3(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$ $\Rightarrow$ $f_3{}'(x) = f_2(x) > 0$ 이므로 $f_3(x)$는 증가한다.

$f_3(0) = 1 > 0$ 이고 $f_3(-3) = f_2(-3) + \dfrac{(-3)^3}{3!} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3}{6} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{2} = -2 < 0$ 이므로 사이값 정리에 의하여 $f_3(x)$는 단 하나의 실근을 가진다.

$f_4(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} \Rightarrow f_4{}'(x) = f_3(x)$ $f_3(x)$는 단 하나의 실근을 가진다.

$f_3(a)=0$ 이라하자. 그러면, $f_4(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $f_4(a)$를 가진다.

$$f_4(x) \ge f_4(a) = f_3(a) + \frac{a^4}{4!} = \frac{a^4}{4!} > 0$$

따라서 $f_4(x)$ 실근을 갖지 않는다.

$f_5(x) = f_4(x) + \frac{x^5}{5!}$ 이고 $f_5{}'(x) = f_4(x) > 0$ 이므로 $f_5(x)$는 증가한다.

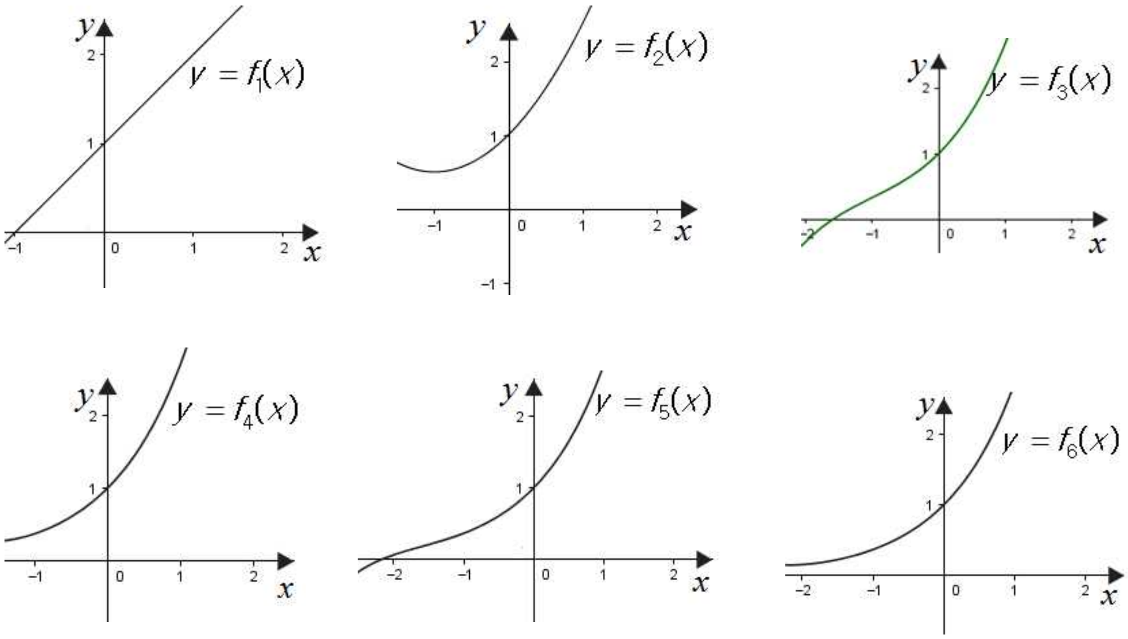
$f_5(0) = 1 > 0$ 이고 $f_5(-5) = f_4(-5) - \frac{5^5}{5!} < 0$ 이므로 사이값 정리에 의하여 $f_5(x)$는 단 하나의 실근을 가진다.

$f_6{}'(x) = f_5(x)$는 단 하나의 실근 a를 갖는다고 하면

$$f_6(x) \ge f_6(a) = f_5(a) + \frac{a^6}{6!} = \frac{a^6}{6!} > 0$$

이므로 실근을 갖지 않는다.

1-3. 그림풀이 : x축과의 교점의 개수 = 실근의 개수



[자연계 오전 문제2]

[문제 2] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

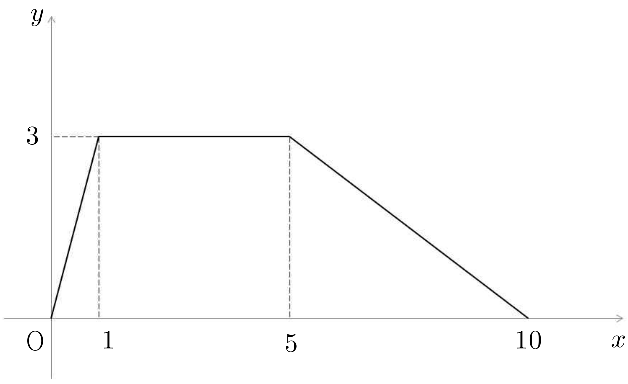
<가> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $a < c < b$일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

<나> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

<다> 아래 그림은 닫힌구간 $[0, 10]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다.



2-1. 제시문 <다>의 함수 $f(x)$에 대하여 다음 정적분의 값을 구하여라. **[15점]**

$$\int_0^{10} f(\sqrt{x+1}-1)\,dx$$

2-2. 제시문 <다>의 함수 $f(x)$에 대하여 다음 정적분의 값을 구하여라. **[15점]**

$$\int_0^{20} e^x f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

출제 의도

(1) 정적분의 성질을 이용할 수 있는지.
(2) 부분적분법을 이용하여 계산할 수 있는지.
(3) 함수의 변화에 따른 정적분을 계산할 수 있는지.
(4) 함수의 변화에 따른 부분적분법을 계산할 수 있는지.
를 평가하기 위하여 출제된 문제이다, 아울러 문항의 답을 찾기 위하여 제시문을 활용하여 답안을 논리적으로 작성하는지 평가하고자 한다.

채점 기준 및 예시 답안

2-1. $f(x)=\begin{cases} 3x & (0\le x<1) \\ 3 & (1\le x<5) \\ -\frac{3}{5}x+6 & (5\le x<10) \end{cases}$

$$f(\sqrt{x+1}-1)=\begin{cases} 3(\sqrt{x+1}-1) & (0\le \sqrt{x+1}-1<1) \\ 3 & (1\le \sqrt{x+1}-1<5) \\ -\frac{3}{5}(\sqrt{x+1}-1)+6 & (5\le \sqrt{x+1}-1<10) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 3(\sqrt{x+1}-1) & (0\le x<3) \\ 3 & (3\le x<35) \\ -\frac{3}{5}(\sqrt{x+1}-1)+6 & (35\le x<120) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{10} f(\sqrt{x+1}-1)\,dx &= \int_0^{3} f(\sqrt{x+1}-1)\,dx+\int_3^{10} f(\sqrt{x+1}-1)\,dx \\ &= \int_0^{3} 3(\sqrt{x+1}-1)\,dx+\int_3^{10} 3\,dx \\ &= [2(x+1)^{\frac{3}{2}}-3x]_0^3+[3x]_3^{10} \\ &= 16-9-2+30-9 \\ &= 26\end{aligned}$$

2-2. 1-2 와 같은 방법으로

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & (0\le x<2)\\ 3 & (2\le x<10)\\ -\frac{3}{10}x+6 & (10\le x<20)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{20}e^x f\left(\frac{x}{2}\right)dx &= \int_0^2 e^x f\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_2^{10}e^x f\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_{10}^{20}e^x f\left(\frac{x}{2}\right)dx\\ &= \int_0^2 e^x\left(\frac{3x}{2}\right)dx+\int_2^{10}e^x(3)\,dx+\int_{10}^{20}e^x\left(-\frac{3x}{10}+6\right)dx\end{aligned}$$

제시문 <나>를 이용하면,

$$=\left[\frac{3}{2}xe^x\right]_0^2-\int_0^2\frac{3}{2}e^x\,dx+3\int_2^{10}e^x\,dx+6\int_{10}^{20}e^x dx-\left[\frac{3x}{10}e^x\right]_{10}^{20}+\int_{10}^{20}\frac{3}{10}e^x dx$$

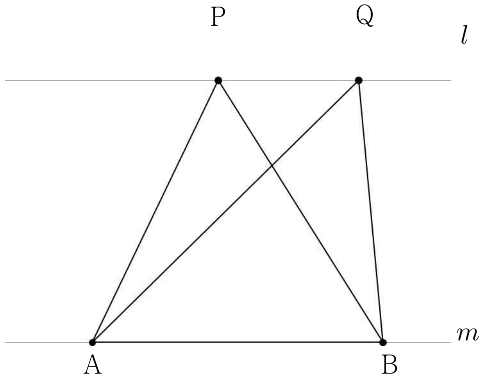
$$=3e^2-\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}+3e^{10}-3e^2+6e^{20}-6e^{10}-6e^{20}+3e^{10}+\frac{3}{10}e^{20}-\frac{3}{10}e^{10}$$

$$=\frac{3}{10}e^{20}-\frac{3}{10}e^{10}-\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}$$

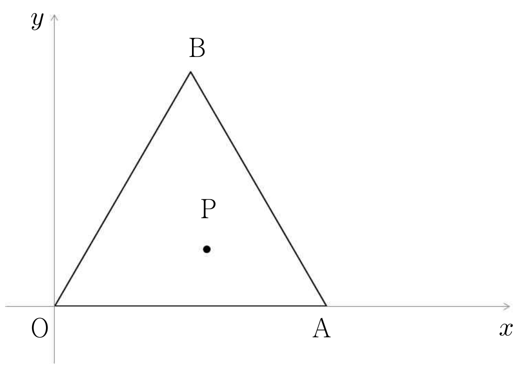
[자연계 오전 문제3]

[문제 3] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 평행하는 두 직선 l과 m에 대하여 선분 AB는 직선 m 위에 있고, 두 점 P, Q는 직선 l 위에 있다. 이때, 삼각형 ABP의 면적과 삼각형 ABQ의 면적이 같다.

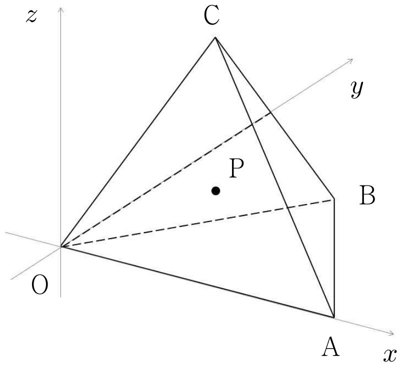


<나>



점 O, A, B의 좌표는 각각 O$(0, 0)$, A$(2, 0)$, B$(1, \sqrt{3})$이고, 점 P는 정삼각형 OAB의 내부에 있다.

<다>



점 O, A, B, C 의 좌표는 각각

$O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(1,\sqrt{3},0)$, $C\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$이고, 점 P 는 정사면체 OABC 의 내부에 있다.

3-1. 제시문 <나>의 그림에서 삼각형 OAP 의 면적, 삼각형 ABP 의 면적, 삼각형 OPB 의 면적이 각각 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ 이 되는 점 P 의 좌표를 구하여라. **[15점]**

3-2. 제시문 <다>의 그림에서 사면체 ABCP 의 부피, 사면체 OABP 의 부피, 사면체 OACP 의 부피, 사면체 OBCP 의 부피가 각각 $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{9}$, $\frac{\sqrt{2}}{9}$, $\frac{\sqrt{2}}{9}$ 가 되는 점 P 의 좌표를 구하여라. **[15점]**

출제 의도

(1) 삼각형의 밑변의 길이와 높이가 같으면 넓이가 같음을 이용할 수 있는지.
(2) 한 점에서 직선까지의 거리 공식을 이용할 수 있는지.
(3) 두 점사이의 직선의 방정식을 구할 수 있는지.
(4) 벡터의 실수배를 이용한 부피를 추론할 수 있는지.
를 평가하기 위하여 출제된 문제이다, 아울러 문항의 답을 찾기 위하여 제시문을 활용하여 답안을 논리적으로 작성하는지 평가하고자 한다.

채점 기준 및 예시 답안

3-1.

삼각형 OAP 의 면적 $\triangle\mathrm{OAP}$가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 P 는 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 위에 있어야 한다.

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\triangle\mathrm{OPB}=\frac{5\sqrt{3}}{12}$ 이고, 원점에서 직선 $y=\sqrt{3}x+k$ 까지의 거리는 $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ 이므로,

$k=-\frac{5\sqrt{3}}{12}$ 이다.

따라서, 점 P 는 직선 $y=\sqrt{3}x-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ 위에 있다.

$\therefore \sqrt{3}x=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{6}$

$\therefore x=\frac{13}{12}$

P 의 좌표 $\left(\frac{13}{12},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

3-2.

사면체 OABP 의 부피 = 사면체 OACP 의 부피 = 사면체 OBCP 의 부피 = $\frac{\sqrt{2}}{9}$ 이므로

OP 를 연장한 직선은 삼각형 ABC 의 무게중심을 지난다.

삼각형 ABC 의 무게중심을 Q 라고 할 때 Q 의 좌표는 $\left(\frac{4}{3},\frac{4\sqrt{3}}{9},\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\text{위 세 개의 사면체 부피의 합}}{\text{전체 부피}}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9},\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$