자 연

2018학년도 신입학 전형 수시

모의논술

성명		지원 학부·학과		수험 번호	

· 답안지와 문제지에 성명, 지원 학부·학과, 수험 번호를 정확히 기입하시오.

· 답안지에 정답 외에는 어떠한 표시도 하지 마시오.

· 90분 안에 답안을 작성하시오.

· 고사 종료 후 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.

· 진행을 위한 감독자의 지시에 응하지 않을 시 퇴실 요구를 받을 수 있습니다.

유의 사항

1. 답안지는 검정색 필기구(볼펜, 연필, 샤프)로만 작성하시오.
   (빨강색이나 파랑색 등 사용 금지)
2. 답안지 수정 시에는 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나, 가로로 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재작성 하시오.(수정테이프, 수정액 사용 불가)
3. 본 고사의 답안은 1매 이내로 작성을 해야 하며, 답안지 교체는 가능하나 기존 답안지 제출은 절대 불가합니다.
4. 답안지 교체로 인한 책임(시간 부족 등)은 요청한 수험생에게 있습니다.
5. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안을 검정색 필기구로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내거나 답안과 관련 없는 표현이나 표기를 한 경우
   3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우
   4) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우

※감독의 지시가 있을 때까지 다음 장으로 넘기지 마시오.

[문제 1] 다음 제시문 <가>~<라>를 읽고 물음에 답하시오.

> 사건 X가 일어날 확률을 $\mathrm{P}(X)$라 하자. 이 때 다음이 성립한다.
>
> **<가>** 두 사건 A와 B에 대하여, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 이다.
>
> **<나>** 두 사건 A와 B가 서로 독립이면, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 이다.
>
> **<다>** 사건 A의 여사건 A^c에 대하여, $\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)$ 이다.
>
> **<라>** 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ (단, $\mathrm{P}(A)>0$) 이다.

1-1. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B^c|A)=\dfrac{1}{2}$ 일 때, $\dfrac{\mathrm{P}(A\cup B)}{\mathrm{P}(A\cap B)}$의 값을 구하여라. **[10점]**

[풀이] 제시문 <라>에 의하여 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{1}{6}$이므로, $\mathrm{P}(B)=6\mathrm{P}(A\cap B)$이다. 또한, 제시문 <다>와 <라>로부터 $\mathrm{P}(B|A)=1-\mathrm{P}(B^c|A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A\cap B)$이다. 제시문 <가>에서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로, $\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A\cap B)$와 $\mathrm{P}(B)=6\mathrm{P}(A\cap B)$를 대입하면 $\dfrac{\mathrm{P}(A\cup B)}{\mathrm{P}(A\cap B)}=7$이다.

1-2. 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}\mathrm{P}(A^c\cap B)$일 때, 조건부확률 $\mathrm{P}(A|B)$의 값을 구하여라.
(단, $\mathrm{P}(B)\neq 0$) **[10점]**

[풀이] 두 사건 A, B가 독립이므로, 사건 A, B^c가 독립이다. 따라서 <나>로부터 다음 식을 얻는다.
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}\mathrm{P}(A^c\cap B)$. 이 때 $\mathrm{P}(B)\neq 0$ 이므로 양 변을 $\mathrm{P}(B)$로 나누면 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{6}\mathrm{P}(A^c)$이다. 한편 제시문 <다>를 이용하면 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{7}$을 얻는다. 따라서 두 사건 A, B가 독립이므로, $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{7}$이다.

1-3. 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B^c|A)=\dfrac{2}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값을 구하여라.
(단, $\mathrm{P}(A)\neq 0, \mathrm{P}(B)\neq 0$) **[10점]**

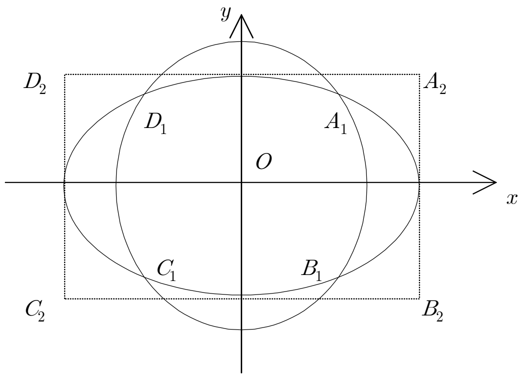
[풀이] 두 사건 A, B가 독립이므로, 사건 A, B^c가 독립이다. 따라서 제시문 <나>와 <라>에 의해 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$이고, $\mathrm{P}(B^c|A)=\mathrm{P}(B^c)=\dfrac{2}{3}$이다. 또한 제시문 <다>로 부터 $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^c)=\dfrac{1}{3}$이다. 이 때 제시문 <가>를 적용하면 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 이다. 그리고 사건 A, B가 독립이므로 제시문 <나>에 의해 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}$이다. 그러므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$이다.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

다음의 타원 (1)과 (2)에 대해서,

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } a>b>0)$$
$$(2)\quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{d^2}=1 \ (\text{단, } d>b>0)$$

타원 (1)은 타원 (2)의 초점을 지나고, 타원 (2)는 타원 (1)의 초점을 지난다.



두 타원의 교점을 A_1, B_1, C_1, D_1 라 하고, 타원(1)의 장축의 양 꼭짓점과 단축의 양 꼭짓점을 지나는 타원(1)의 접선들의 교점을 A_2, B_2, C_2, D_2라 하자.

2-1. 제시문의 타원 (1)과 (2)의 장축이 같음을 보여라. [10점]

[풀이] 타원 (1)의 초점을 $(\pm k_1, 0)$ 라 하고, 타원 (2) 의 초점을 $(0, \pm k_2)$ 라 하자. 즉, $k_1=\sqrt{a^2-b^2}$, $k_2=\sqrt{d^2-b^2}$.
타원 (1)은 타원 (2)는 초점을 지나고 타원 (2)는 타원 (1)의 초점을 지나는 조건으로부터,
$b=\sqrt{a^2-b^2}$, $b=\sqrt{d^2-b^2}$ 가 성립하므로 $a=d=\sqrt{2}\,b$이다. 따라서, 장축의 길이는 같다.

2-2. 제시문의 사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이를 S_1, 사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이를 S_2라 하자. S_2와 $2S_1$의 대소를 비교하여라. [10점]

[풀이] 문제 1-1에서 $a=d$ 이므로, 두 타원의 교점 (p,q)에서 $\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1$ 과 $\frac{p^2}{b^2}+\frac{q^2}{a^2}=1$ 이 성립한다.
따라서 $(p,q)=(\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})=(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,b,\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,b)$. 이로부터 사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이 S_1 은 $\frac{8}{3}b^2$이다.
타원의 장축과 단축으로부터 사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이 S_2는 $4\sqrt{2}\,b^2$ 이다. 따라서 $S_2>2S_1$ 이다.

[별해 1] 문제 1-1에서 $a=d$ 이므로, 두 타원의 교점 (p,q)에서 $\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1$ 과 $\frac{p^2}{b^2}+\frac{q^2}{a^2}=1$ 이 성립한다.

즉, $(p,q)=(\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})$. 이로부터 사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 넓이 S_1 은 $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$이다.

타원의 장축과 단축으로부터 사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 넓이 S_2는 $4ab$ 이다.

$a>b>0$ 이므로, $2S_1-S_2=\frac{4ab}{a^2+b^2}(2ab-a^2-b^2)=-\frac{4ab}{a^2+b^2}(a-b)^2<0$. 따라서 $S_2>2S_1$ 이다.

[별해 2] 문제 1-1에서 $a=d$ 이므로, 두 타원의 교점 (p,q)에서 $\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1$ 과 $\frac{p^2}{b^2}+\frac{q^2}{a^2}=1$ 이 성립한다.

즉, $(p,q)=(\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})$. 이로부터 사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 넓이 S_1 은 $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$이다.

타원의 장축과 단축으로부터 사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 넓이 S_2는 $4ab$ 이다.

기하-조화평균의 절대부등식 $\sqrt{xy}\ge\frac{2xy}{x+y}$ 으로부터, 부등식 $4ab\ge\frac{8a^2b^2}{a^2+b^2}$ 을 얻는다.

이 때 $a>b$ 이므로 $S_2>2S_1$ 이다.

2-3. 제시문의 교점 $\mathrm{A_1}$에서 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. 이때 $\tan\theta$의 값을 구하여라. [10점]

[풀이] 문제 1-1에서 $a=d$ 이므로, 두 타원의 교점 $\mathrm{A_1}$의 좌표 (p,q)에 대해 $\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1$ 과 $\frac{p^2}{b^2}+\frac{q^2}{a^2}=1$ 이 성립한다.

즉, $(p,q)=(\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})$. 그러므로 교점 $\mathrm{A_1}$의 좌표는 $(p,q)=(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})$이다. 이 때 음함수의 미분으로 부터 식 $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$, $\frac{2x}{b^2}+\frac{2yy'}{a^2}=0$ 을 얻는다. 따라서 교점 A_1의 두 접선의 기울기는 각각 $-\frac{b^2}{a^2}$, $-\frac{a^2}{b^2}$ 이다. 결국 문제 1-1 에서 $a=d=\sqrt{2}\,b$ 이므로, 교점 A_1의 두 접선의 기울기는 각각 $-\frac{1}{2}$, -2이다. 두 접선이 x축과 이루는 각을 각각 θ_1, θ_2 라 하면, $\tan\theta_1=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta_2=-2$ 이다. 두 접선이 이루는 예각 θ의 크기는 $\theta_1-\theta_2$ 이다. 따라서 $\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{3}{4}$.

[문제 3] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분 가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

<나> 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$ 이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가하고 $f'(x)<0$ 이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

<다> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x),\quad \text{단 } (a<x<b)$$

3-1. 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 존재하고, $a<x<b$인 x에 대하여 항상 $f''(x)<0$이라 하자. 이때, $a<x<b$인 모든 x에 대하여, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$임을 보여라. [10점]

[풀이] $f(x)$는 미분가능 하므로 구간 $[a,x]$, $[x,b]$에서 각각 제시문 <가>의 평균값의 정리를 적용시키면
$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)\ \ (a<c<x)$, $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}=f'(d)\ \ (x<d<b)$ 를 만족하는 c, d가 존재한다.
$f''(x)<0$이므로 $f'(x)$는 감소함수이다. 또한 $c<d$ 이므로 $f'(c)>f'(d)$를 만족한다. 따라서 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$ 이다.

3-2. $0<t<1$인 t에 대하여 $\displaystyle\int_0^t e^{-x^2}dx$와 $t\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$의 대소를 비교하여라. [15점]

[풀이] $f(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-x^2}dx$ 라 하자. $0<t<1$ 일 때, 제시문 <다>에 의하여 $f'(t)=e^{-t^2}$, $f''(t)=-2te^{-t^2}<0$ 이므로

문제 3-1의 부등식에 의하여 $\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}>\dfrac{f(1)-f(t)}{1-t}$ 가 성립한다.

$f(0)=0$이므로 $(1-t)f(t)>t(f(1)-f(t))\ \Rightarrow\ f(t)>tf(1)$이다. 따라서 $\displaystyle\int_0^t e^{-x^2}dx>t\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 이다.

3-3. 함수 $f(x)$는 $0\le x\le 1$에서 연속이고, $0<t<1$인 모든 t에 대하여 $\displaystyle\int_0^1 x^2f(tx)\,dx=e^t$를 만족한다. 이때 $f(x)$를 구하여라. [15점]

[풀이] $\displaystyle\int_0^1 x^2f(tx)\,dx$ 에서 $tx=u$라 치환하면 $x=\dfrac{1}{t}u$ $dx=\dfrac{1}{t}du$ 이며, 적분구간은 $x=0$일 때 $u=0$, $x=1$일 때 $u=t$ 이다.
그러므로 $\displaystyle\int_0^1 x^2f(tx)\,dx=\int_0^t\frac{1}{t^2}u^2f(u)\frac{1}{t}\,du=\frac{1}{t^3}\int_0^t u^2f(u)\,du=e^t$이고 $\displaystyle\int_0^t u^2f(u)\,du=t^3e^t$이다. 이제 양변을 t에 대하여 미분하면 $t^2f(t)=3t^2e^t+t^3e^t\ \Rightarrow\ f(t)=(t+3)e^t$. 따라서 $f(x)=(x+3)e^x$ 이다.