[자연계 오후 문제1]

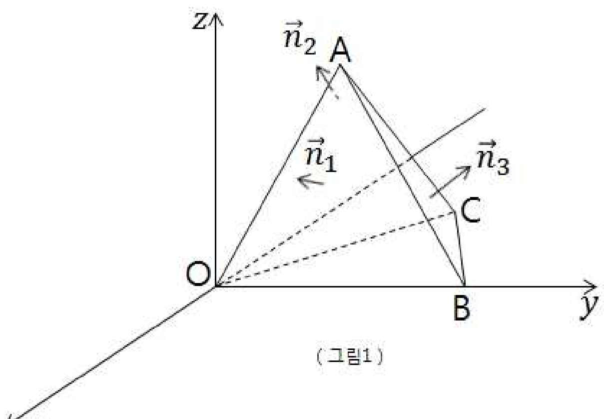
[문제 1] 다음 제시문 <가>~<라>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> OABC는 한 변의 길이가 30인 정사면체이다.

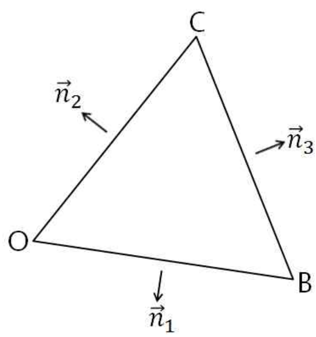
<나> <그림 1>과 같이 정사면체의 한 꼭지점은 좌표계의 원점에, 정사면체의 한 모서리 OB는 y축에, 정사면체의 한 면 OBC는 xy평면에 놓여 있다.

<다> 면 OAB를 포함하는 평면에 수직하고 크기가 1인 벡터를 $\overrightarrow{n_1}=(p_1,q_1,r_1)$,
면 OAC를 포함하는 평면에 수직하고 크기가 1인 벡터를 $\overrightarrow{n_2}=(p_2,q_2,r_2)$,
면 ABC를 포함하는 평면에 수직하고 크기가 1인 벡터를 $\overrightarrow{n_3}=(p_3,q_3,r_3)$이라 하자.

<라> <그림 2>는 정사면체의 위에서 xy평면으로 내려다 본 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$의 방향을 보여준다.



< 그림 1 >



< 그림 2 >

1-1. 정사면체의 두 면이 이루는 이면각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) **[10점]**

1-2. xy평면에 수직하고 크기가 1인 벡터 $\overrightarrow{m}=(0,0,1)$을 이용하여 제시문 <다>에서 정의된 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$의 성분 중 r_1,r_2,r_3을 구하시오. **[10점]**

1-3. 제시문 <다>에서 정의된 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$을 구하시오. **[15점]**

1-4. 정사면체의 한 면 ABC를 포함하는 평면의 방정식을 구하시오. **[5점]**

1. 출제 의도

본 문제는 좌표공간에서 이면각을 구하고 법선벡터를 이용하여 평면의 방정식을 구하는 과정을 평가하고자 한다.

1-1 정사면체의 두 면이 이루는 이면각 구하는 과정을 평가하고자 하는 문제이다.

1-2 각 면의 법선벡터들이 서로 이면각이 같음을 이용하여 법선벡터의 성분을 구하는 과정을 평가하고자 하는 문제이다.

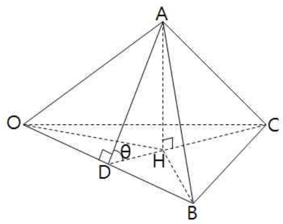
1-3 각 면의 법선벡터들 간의 수직과 이면각관계를 이용하여 각 법선벡터의 성분을 구하는 과정을 평가하고자 하는 문제이다.

1-4 공간상의 한 점과 법선벡터를 이용하여 평면의 방정식을 표현과정을 평가하고자 하는 문제이다.

2. 예시답안

1-1.

[풀이]



꼭짓점 A에서 밑면 OBC에 내린 수선의 발을 H 라 하자. C 와 H 를 연결한 선이 OB 와 만나는 점을 D 라 하자. H 는 $\triangle OBC$의 무게중심이므로

$DH = \dfrac{1}{3} CD$이다.

$\triangle OAB$ 와 $\triangle OBC$ 가 이루는 이면각을 θ 라 하자.

($\triangle OAB$ 의 넓이) $\times$ $\cos\theta$ = ($\triangle OHB$ 의 넓이) 에서

$$\cos\theta = \frac{1}{3}$$

1-2.

[풀이]

xy평면과 OAB, OAC, ABC면이 이루는 각이 이면각이다.

xy평면에 수직한 크기가 1인 벡터 $\overrightarrow{m} = (0,0,1)$ 에 대해

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{m} = \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{m} = \overrightarrow{n_3} \cdot \overrightarrow{m} = \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ 이므로

$r_1 \; = \; r_2 \; = \; r_3 \; = \; \dfrac{1}{3}$ 이다.

1-3.

[풀이] 정사면체 $OABC$ 의 한 변의 길이가 30이므로,

$O(0,0,0)$, $B(0,30,0)$, $C(-15\sqrt{3}, 15, 0)$, $A(-5\sqrt{3}, 15, 10\sqrt{6})$ 으로 나타낼 수 있다.

이 때, $\overrightarrow{n_1}$ 은 평면 OAB 에 수직이므로,

$\overrightarrow{n_1}$ 은 $\overrightarrow{OB}$ 에 대한 방향벡터 $(0,1,0)$와

$\overrightarrow{OA}$ 에 대한 방향벡터 $(-\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6})$ 와 수직이다.

$\overrightarrow{n_1}=(p_1, q_1, \frac{1}{3})$ 일 때, $\overrightarrow{n_1} \bullet (0,1,0)=0$ 이므로, $q_1=0$.

$\overrightarrow{n_1}=(p_1, 0, \frac{1}{3})$이고, $\overrightarrow{n_1} \bullet (-\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6})=0$ 이므로, $p_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

따라서 $\overrightarrow{n_1}=(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{1}{3})$이다.

같은 방법으로 $\overrightarrow{n_2}$ 는 평면 OAC 와 수직이므로,

$\overrightarrow{n_2} \bullet \overrightarrow{OA}=0$, $\overrightarrow{n_2} \bullet \overrightarrow{OC}=0$ 에서 $\overrightarrow{n_2}=(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{3})$이다.

같은 방법으로 $\overrightarrow{n_3}$ 는 평면 ABC 와 수직이므로,

$\overrightarrow{n_3} \bullet \overrightarrow{AB}=0$, $\overrightarrow{n_3} \bullet \overrightarrow{BC}=0$ 에서 $\overrightarrow{n_3}=(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{3})$이다.

1-4.

[풀이]

$\overrightarrow{n_3}=(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{3})$ 이고 점 $B(0, 30, 0)$ 를 지나므로

ABC 를 포함하는 평면의 방정식은

$-\frac{\sqrt{2}}{3}x+\frac{\sqrt{6}}{3}(y-30)+\frac{1}{3}z=0$ 이다.

[자연계 오후 문제2]

[문제 2] 다음 제시문 <가>와 <나>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 부분적분법

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

단, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$는 연속이다.

<나> 함수 $f(x)$를 $f(x) = \dfrac{1+\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^4 \cos x}{2} + e^x$로 정의하자.

2-1. 제시문 <나>에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여, 함수 $g(x) = f(x) + f(\pi - x)$의 도함수를 구하시오. **[10점]**

2-2. 제시문 <나>에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여, $\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx$의 값을 구하시오. **[20점]**

1. 출제 의도

본 문제는 도함수를 이용하여 함수를 이해하고 함수의 정적분을 구하는 과정을 평가하고자 한다.

2-1 곱으로 된 함수와 삼각함수, 초월함수의 도함수를 구하는 과정을 평가하고자 한다.

2-2 부분적분을 이용하여 곱으로 된 함수를 적분할 수 있는지 평가하고자 하는 문제이다.

2. 예시답안

2-1.

[풀이]

$f(x) = \dfrac{1+(x-\dfrac{\pi}{2})^4 \cos x}{2} + e^x$ 이면

$f(\pi - x) = \dfrac{1+(\dfrac{\pi}{2}-x)^4 \cos(\pi - x)}{2} + e^{(\pi - x)} = \dfrac{1-(x-\dfrac{\pi}{2})^4 \cos x}{2} + e^{(\pi - x)}$이므로

$g(x) = f(x) + f(\pi - x) = 1 + e^x + e^{\pi - x}$ 이다.

따라서 $g'(x) = e^x - e^{\pi - x}$ 이다.

2-2.

[풀이] $I=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx$ 라 하자. $x=\pi-t$ 로 치환하면,

$$=\int_{\pi}^{0} f(\pi-t)\sin(\pi-t)\,(-dt)$$

$$=\int_0^{\pi} f(x-x)\,\sin x\,dx$$

따라서, $I=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi} f(\pi-x)\,\sin x\,dx$ 이다.

$$2I=\int_0^{\pi}(f(x)+f(\pi-x))\sin x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi} g(x)\,\sin x\,dx$$ 이므로,

$$I=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} g(x)\,\sin x\,dx$$

이 때, 제시문 <나> 의 부분적분법을 이용하면,

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} g(x)\,\sin x\,dx=\frac{1}{2}\left\{[-g(x)\cos x\,]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} g'(x)\cos x\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{g(\pi)+g(0)+\int_0^{\pi}(e^{x}-e^{\pi-x})\cos x\,dx\right\}$$ 이다.

이 때, $g(\pi)=e^{\pi}+2$, $g(0)=e^{\pi}+2$ 이고,

$$\int_0^{\pi} e^{x}\cos x\,dx=-\int_0^{\pi} e^{\pi-x}\cos x\,dx$$ 이므로,

$$I=\frac{1}{2}\left\{2e^{\pi}+4+2\int_0^{\pi} e^{x}\cos x\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{2e^{\pi}+4-e^{\pi}-1\}$$

$$=\frac{e^{\pi}+3}{2}$$ 이다. 그러므로, $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx=\frac{e^{\pi}+3}{2}$ 이다.

[자연계 오후 문제3]

<가> 어떤 사건이 일어날 확률이 p 이고 이 시행을 n 회 독립적으로 반복할 때 이 사건이 일어날 횟수를 확률변수 X라 하자. 이때 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르며, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\mathrm{p}^{\mathrm{r}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-r}} \quad (r=0, 1, \ldots, n)$$

이다.

<나> 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, X의 기댓값은

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{r=0}^{n} r\, {}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r}=np$$

이고 X의 분산은 $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$이다.

<다> 확률변수 X의 분산은

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2$$

이다.

3-1. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{2}{5}\right)$를 따른다. $\mathrm{V}(\sqrt{2}X+1)=48$일 때, $\mathrm{E}(2X-n)$의 값을 구하시오. **[10점]**

3-2. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(10, p)$를 따른다. 식 $\sum_{r=0}^{10}\mathrm{P}(X \le r)=9$를 만족하는 p의 값을 구하시오. **[20점]**

1. 출제 의도

본 문제는 이항분포를 이해하고 그에 따른 평균, 분산관계 지식을 평가하고자 한다.
3-1 이항분포의 평균과 분산의 관계식을 평가하고자 한다.
3-2 이항분포의 개념을 이해하고 그때의 확률의 합을 통하여 확률의 구하는 과정을 평가하고자 한다.

2. 예시답안

3-1.

[풀이]

$X \sim \mathrm{B}\left(n, \frac{2}{5}\right)$이므로 $\mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6n}{25}$이다. 따라서

$\mathrm{V}(\sqrt{2}X+1)=2\mathrm{V}(X)=2\cdot\dfrac{6n}{25}=48$로부터 $n=100$을 얻는다.

따라서 $\mathrm{E}(2X-n)=2\mathrm{E}(X)-n=2(100)\dfrac{2}{5}-100=-20$이다.

3-2.

[풀이]

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{10}\mathrm{P}(X\le r)&=P(X=0)+P(X\le 1)+P(X\le 2)+\cdots+P(X\le 10)\\&=11P(X=0)+10P(X=1)+\cdots+P(X=10)\\&=\sum_{r=0}^{10}(11-r)P(X=r)\\&=11\sum_{r=0}^{10}P(X=r)-\sum_{r=0}^{10}rP(X=r)\end{aligned}$$

$\sum_{r=0}^{10}P(X=r)=1$ 이고, X 는 이항분포 $B(10,p)$ 를 따르므로,

제시문 <나> 에 의하여 $E(X)=\sum_{r=0}^{10}rP(X=r)=10p$ 이다.

따라서, $\sum_{r=0}^{10}\mathrm{P}(X\le r)=11-10p=9$ 이므로, $p=\dfrac{1}{5}$ 이다.