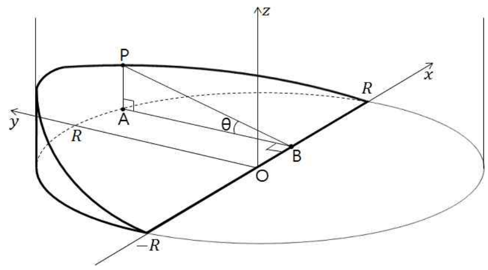
[자연계 오전 문제1]

[문제 1] 다음 제시문 <가>와 <나>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 반지름이 R인 원기둥을 밑면의 지름을 지나고 밑면과 이루는 각의 크기가 θ인 평면으로 자른다. 아래 그림은 이때 생기는 입체도형을 좌표공간 내에서 나타낸 것이다. 선분 AB는 x축에 수직하며 삼각형 PAB는 직각삼각형이다. 점 A, B, P의 좌표는 A$(x, y, 0)$, B$(x, 0, 0)$, P(x, y, z)이다.



<나> 반지름이 R인 구를 동일한 지름을 지나는 평면으로 각도 $\frac{2\pi}{N}$만큼 반복하여 자르면 N 개의 같은 모양의 조각으로 나뉜다. 이 N개의 조각들을 아래 그림처럼 제시문 <가>의 $\theta = \frac{2\pi}{N}$인 입체도형 N개로 바꾸어 놓자.

1-1. 제시문 <가>에서 원기둥을 자르는 평면의 방정식을 구하시오. **[10점]**

1-2. 제시문 <가>에서 주어진 삼각형 PAB의 넓이를 x에 대한 함수로 표현하시오. **[10점]**

1-3. 제시문 <가>에서 설명된 입체도형의 부피를 구하시오. **[10점]**

1-4. 제시문 <나>에서 표현된 입체도형 N 개의 부피의 합 V_N을 구하고, $\lim_{N \to \infty} V_N$을 구하시오. **[10점]**

1. 출제 의도

(1) 좌표공간에 제시된 평면의 방정식을 쓸 수 있는지, (2) 삼각형과 같은 간단한 기하학적 도형의 면적을 좌표공간의 좌표의 함수로 쓸 수 있는지, (3) 입체도형의 부피를 구하기 위해 이차함수의 정적분을 이용할 수 있는지, 그리고 (4) 구분구적법의 개념을 이해하고 부피의 합을 구하는데 삼각함수의 극한을 이용할 수 있는지를 평가하기 위해 출제된 문제이다. 아울러 문항의 답을 찾기 위해 제시문을 잘 활용하는지와 답안을 논리적으로 작성하는지도 평가한다.

2. 예시답안

1-1.

[풀이]

원기둥을 자른 평면은 x축을 포함하는 평면의 방정식이므로 $z=my$ 로 나타낼 수 있다. 이때, xy 평면과 이루는 기울기 $m=\tan\theta$ 이므로, $z=\tan\theta y$ 이다.

(별해)

원기둥을 자른 단면에 대한 법선벡터는 $\vec{n}=(0,-\sin\theta,\cos\theta)$이다. 그리고 이 평면은 좌표원점 $\mathrm{O}(0,0,0)$를 포함하므로 평면의 식은

$$\vec{n}\cdot(x,y,z)=-y\sin\theta+z\cos\theta=0.$$

1-2.

[풀이]

점 $\mathrm{P}(x,y,z)$는 단면 위의 점이므로 문제 1-1로부터 $z=y\tan\theta$이 됨을 알 수 있다. 그리고 점 $\mathrm{A}(x,y,0)$는 반경 R인 원의 원주 위의 점이므로 $x^2+y^2=R^2$. 그러므로

$$\triangle\mathrm{PAB}\text{의 넓이} = \frac{1}{2}y\cdot z=\frac{1}{2}y\cdot y\tan\theta=\frac{\tan\theta}{2}y^2=\frac{\tan\theta}{2}(R^2-x^2)$$

1-3.

[풀이]

문제 1-2에서 구한 삼각형 PAB의 면적을 $-R\le x\le R$의 영역에서 적분하면 입체도형의 부피가 얻어진다.

$$\text{부피} = \int_{-R}^{R}\frac{\tan\theta}{2}(R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}\tan\theta\,R^3$$

1-4.

[풀이]

제시문 <나>에서 입체도형 하나의 부피는 문제 1-3의 결과에 $\theta=\frac{2\pi}{N}$을 대입하면 얻어지고 모두 N 개의 입체도형이 있으므로 부피의 총합은

$$V_N=N\cdot\frac{2}{3}\left(\tan\frac{2\pi}{N}\right)R^3$$

그러므로 $N\to\infty$의 극한을 취하면, $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$이므로

$$\lim_{N\to\infty}V_N=\lim_{N\to\infty}\frac{4\pi}{3}R^3\frac{\tan\frac{2\pi}{N}}{\frac{2\pi}{N}}=\frac{4\pi}{3}R^3$$

[자연계 오전 문제2]

[문제 2] 다음 제시문 <가>~<라>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 점 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(p,q,r)$인 직선의 방정식은 아래와 같다.

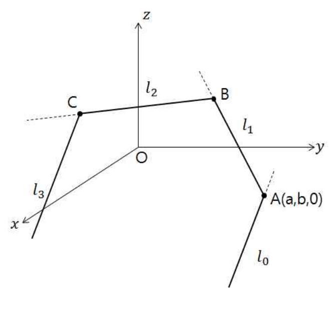
$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r} \qquad (\text{단, } pqr \neq 0)$$

<나> 한 직선이 다른 직선과 좌표평면 위의 한 점에서 만날 때 아래 규칙을 따른다고 하자.

(1) 방향벡터가 $\vec{u}=(p,q,r)$인 직선은 xy평면의 한 점에서 방향벡터 $\vec{u'}=(p,q,-r)$인 직선과 만난다.
(2) 방향벡터가 $\vec{u}=(p,q,r)$인 직선은 yz평면의 한 점에서 방향벡터 $\vec{u'}=(-p,q,r)$인 직선과 만난다.
(3) 방향벡터가 $\vec{u}=(p,q,r)$인 직선은 zx평면의 한 점에서 방향벡터 $\vec{u'}=(p,-q,r)$인 직선과 만난다.

<다> $\vec{0}$이 아닌 두 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 평행이면 $\vec{v}=k\vec{u}\ (k \neq 0)$이다.

<라> 방향벡터가 $\vec{u}=(p,q,r)$인 직선 l_0가 xy평면의 점 $\mathrm{A}(a,b,0)$에서 직선 l_1과 만나고 직선 l_1은 yz평면의 점 B에서 직선 l_2와 만난다. 그리고 직선 l_2는 zx평면의 점 C에서 직선 l_3와 만난다. 두 직선이 좌표평면에서 만날 때 항상 제시문 <나>의 규칙을 따른다. 또한 $p,q,r\,(pqr \neq 0)$은 모두 같은 부호를 가지며, 네 직선 l_0, l_1, l_2, l_3 모두 좌표공간에서 x, y, z 좌표가 양인 부분만을 고려한다.



2-1. 직선 l_0의 방향벡터가 $\vec{u}=(p,q,r)$일 때, 직선 l_1, l_2, l_3의 방향벡터를 구하고 직선 l_3와 직선 l_0가 평행함을 설명하시오. **[10점]**

2-2. 직선 l_1, l_2의 방정식을 구하여 점 B와 점 C의 좌표를 p,q,r,a,b로 나타내시오. 그리고 $p=q=r=1$일 때 두 직선 l_0와 l_3 사이의 거리를 구하시오. **[20점]**

1. 출제 의도

(1) 방향벡터가 주어진 직선과 또 다른 직선이 좌표평면의 한 점에서 만날 때 제시된 규칙에 따라 직선의 방향벡터를 찾고 직선들 사이의 평행 여부를 판단할 수 있는지, (2) 직선과 평면의 교점을 구하고 그 교점을 지나 방향벡터가 주어진 직선의 방정식을 쓸 수 있는지, 그리고 평행한 두 직선 사이의 거리를 공간벡터와 내적 개념을 이용해 구할 수 있는지를 평가하기 위해 출제된 문제이다. 아울러 문항의 답을 찾는 데에 제시문을 잘 활용하는지와 풀이과정을 논리적으로 전개하는지도 평가한다

2. 예시답안

2-1.

[풀이]

제시문 <나>의 규칙을 쓰면 제시문 <라>에 설명된 각 직선의 방향벡터는 다음과 같이 얻어진다.

직선 l_0 : $\vec{u}=(p,q,r)$

직선 l_1 : $\vec{u_1}=(p,q,-r)$

직선 l_2 : $\vec{u_2}=(-p,q,-r)$

직선 l_3 : $\vec{u_3}=(-p,-q,-r)$

직선 l_3와 직선 l_0의 방향벡터는 $\vec{u_3}=-\vec{u}$의 관계를 가지므로 제시문 <다>에 의해 두 직선은 서로 평행하다

2-2.

[풀이]

직선 l_1은 점 $\mathrm{A}(a,b,0)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u_1}=(p,q,-r)$이므로 제시문 <가>에 의해 직선의 식은

$$\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z}{-r}\ .$$

직선 l_1이 yz평면($x=0$)과 만나는 교점 B를 구하기 위해 직선 l_1의 식에 $x=0$을 대입하면

$$\frac{-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z}{-r}\quad\Rightarrow\quad y=b-\frac{q}{p}a,\ z=\frac{r}{p}a$$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(0,b-\frac{q}{p}a,\frac{r}{p}a\right)$이다.

직선 l_2는 점 $\mathrm{B}\left(0,b-\frac{q}{p}a,\frac{r}{p}a\right)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u_2}=(-p,q,-r)$이므로 직선의 식은

$$\frac{x}{-p}=\frac{y-b+\frac{q}{p}a}{q}=\frac{z-\frac{r}{p}a}{-r}\ .$$

zx평면($y=0$) 위의 점 C는 직선 l_2의 식에 $y=0$을 대입해 구한다.

$$\frac{x}{-p}=\frac{-b+\frac{q}{p}a}{q}=\frac{z-\frac{r}{p}a}{-r}\quad\Rightarrow\quad x=-a+\frac{p}{q}b,\ z=\frac{r}{q}b$$

따라서 점 C의 좌표는 $\left(-a+\frac{p}{q}b, 0, \frac{r}{q}b\right)$이다.

$p=q=r=1$일 때 두 직선 l_3와 l_0의 방향벡터는 $\vec{u}=(1,1,1)$으로 같고 직선 l_3 위의 점 C는 좌표가 $(-a+b,0,b)$이다. 그러므로

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a,b,0)-(-a+b,0,b)=(2a-b,b,-b).$$

두 벡터 $\vec{u}$와 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ 사이의 각도를 θ라 하면 두 직선 사이의 거리는 다음과 같이 얻어진다.

$$\text{두 직선 사이의 거리} = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\sin\theta = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2(1-\cos^2\theta)} = \sqrt{\left\{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|}\right)^2\right\}}$$
$$= \sqrt{\frac{8}{3}(a^2-ab+b^2)}$$

[자연계 오전 문제3]

[문제 3] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 다항식 $(a+b)^m$ 의 전개식은 아래와 같이 주어진다.

$$(a+b)^m = {}_m\mathrm{C}_0 a^m + {}_m\mathrm{C}_1 a^{m-1}b^1 + \cdots + {}_m\mathrm{C}_r a^{m-r}b^r + \cdots + {}_m\mathrm{C}_m b^m$$

<나> n 은 아래의 성질을 갖는다.

(1) n 은 자연수이다.
(2) n 은 홀수이다.
(3) n 은 5 의 배수가 <u>아니다</u>.

<다> 제시문 <나>의 조건을 만족하는 n 에 대해 p_n 은 n^{201} 을 1000 으로 나누었을 때의 나머지이다.

예를 들면 p_3 은 3^{201} 을 1000 으로 나누었을 때의 나머지이다.

3-1. 제시문 <다>에서 정의된 p_3 을 구하시오. **[10점]**

3-2. 제시문 <다>에서 정의된 p_n 에 대해, $a_1 = p_1$, $a_2 = p_3$, $a_3 = p_7$, $a_4 = p_9$, $a_5 = p_{11}$, $a_6 = p_{13}$, $a_7 = p_{17}$, $a_8 = p_{19}$, $\cdots$ 으로 새로운 수열 $\{a_k\}$를 정의한다. 이때 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 를 구하시오. **[20점]**

1. 출제 의도

이항정리는 '수학Ⅰ'에서 핵심 성취기준으로 선정된 다항식의 곱셈, 인수분해 등의 내용이 확장된 것으로 고등학교 수학과 교육과정에 포함된 전 영역에서 나타나는 다항식의 전개와 인수분해를 다루는 데 기본이 되며, 독립시행, 이항분포등을 이해하는 데 기본이 되는 개념이다. 또한 수열의 뜻은 '미적분Ⅰ'에서 수열의 극한, 구분구적법뿐만 아니라 고등학교 수학과 교육과정에서 다루는 함수와 관련된 여러 가지 문제 상황을 해결하는 데 기본이 되는 개념이다. 본 문항의 핵심적인 내용은 확률과 통계의 '이항정리'와 수학2의 '수열의 뜻'의 단원에서 다루어진다.

본 문제는 제시문을 통해 이항정리를 정확히 이해하고 구할 수 있는지, 반복적인 계산 과정을 통해 수열의 특징을 찾아 낼 수 있는지를 평가하고자 한다.

3-1 이항정리를 정확히 이해하고 구할 수 있는 과정을 평가하고자 하는 문제이다.

3-2 이항정리를 정확히 이해하고 구할 수 있는지, 반복적인 계산 과정을 통해 수열의 특징을 찾아 낼 수 있는지를 평가하고자 하는 문제이다.

2. 예시답안

3-1.

[풀이] $3^{201} = 3 \cdot 3^{200}$

$= 3 \cdot 9^{100}$

$= 3 \cdot (10-1)^{100}$

$= 3 \cdot ({}_{100}C_0(-1)^{100} + {}_{100}C_1 10(-1)^{99} + \cdots + {}_{100}C_{100} 10^{100})$

이 때, ${}_{100}C_1 10(-1)^{99} + \cdots + {}_{100}C_{100} 10^{100}$

$= 1000(-1 + 505 + \cdots + 10^{97})$ 이므로 1000 으로 나누어 떨어진다.

따라서, 3^{200} 을 1000으로 나누었을 때, 나머지는 1이고,

3^{201} 을 1000으로 나누었을 때, 나머지는 3이다. 그러므로, $P_3 = 3$ 이다.

3-2.

[풀이] $7^{201}=7 \cdot 7^{200}$

$=7 \cdot 49^{100}$

$=7 \cdot (50-1)^{100}$

$=7 \cdot ({}_{100}C_0(-1)^{100}+{}_{100}C_1\,50(-1)^{99}+\cdots+{}_{100}C_{100}\,50^{100})$

이 때, ${}_{100}C_1\,50(-1)^{99}+\cdots+{}_{100}C_{100}\,50^{100}$ 은 1000 으로 나누어 떨어진다.

따라서, 7^{201} 을 1000으로 나누었을 때, 나머지는 7이다. 그러므로, $P_7=7$ 이다.

$9^{201}=9 \cdot 9^{200}$

$=9 \cdot (10-1)^{200}$

$=9 \cdot ({}_{200}C_0(-1)^{200}+{}_{200}C_1\,10(-1)^{199}+\cdots+{}_{200}C_{200}\,10^{200})$ 이므로, $P_9=9$.

$11^{201}=11 \cdot 11^{200}$

$=11 \cdot (10+1)^{200}$

$=11 \cdot ({}_{200}C_0+{}_{200}C_1\,10+\cdots+{}_{200}C_{200}\,10^{200})$ 이므로, $P_{11}=11$

$13^{201}=13 \cdot (10+3)^{200}$

$=13 \cdot ({}_{200}C_0\,3^{200}+{}_{200}C_1\,10(3)^{199}+\cdots+{}_{200}C_{200}\,10^{200})$ 이다.

3-1 의 결과에서 3^{200} 을 1000으로 나눈 나머지는 1이고,

${}_{200}C_1\,10(3)^{199}+\cdots+{}_{200}C_{200}\,10^{200}$ 는 1000으로 나누어떨어진다.

따라서 $P_{13}=13$.

위와 같은 방법으로

$P_{17}=17$, $P_{19}=19$, $\cdots$, $P_{49}=49$ 이다.

따라서, $\sum_{k=1}^{20} a_k = P_1+P_3+\cdots+P_{49}$

$$=\sum_{k=1}^{25}(2k-1)-5(1+3+5+7+9)=500$$ 이다.