2014 수시 모의 출제 2차 문제 풀이

[문제 1] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 자연수들로 이루어진 집합 U의 각 원소는 2, 3, 5 중 적어도 1개 이상의 수로 나누어 떨어진다. U의 원소 중 2의 배수들의 집합을 A, 3의 배수들의 집합을 B, 5의 배수들의 집합을 C라 하자.

<나> $n(X)$가 집합 X의 원소의 개수를 나타낸다고 할 때, $n(A)=19$, $n(B)=18$, $n(C)=21$이다. 또 2, 3, 5 중 적어도 2개 이상의 수로 나누어 떨어지는 U의 원소의 개수는 23이다. 그리고 2, 3, 5 모두로 나누어 떨어지는 U의 원소의 개수는 5이다.

<다> 집합 X, Y, Z에 대해서 다음이 성립한다.

(i) $n(X\cup Y) = n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$

$n(X\cup Z) = n(X)+n(Z)-n(X\cap Z)$

$n(Y\cup Z) = n(Y)+n(Z)-n(Y\cap Z)$

(ii) $n(X\cup Y\cup Z) = n(X)+n(Y)+n(Z)-n(X\cap Y)-n(X\cap Z)-n(Y\cap Z)+n(X\cap Y\cap Z)$

1−1. 집합 U의 원소의 개수를 구하시오. [10점]

[풀이]

제시문 <나>에 의해서

$$n(A)=19,\ n(B)=18,\ n(C)=21,\ n(A\cap B\cap C)=5,$$
$$n((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))=23$$

임을 알 수 있다. 또한, 제시문 <다>의 (ii)에 의해서

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

한편, $X=A\cap B$, $Y=A\cap C$, $Z=B\cap C$ 라 놓고, <다>의 (ii)를 적용하면

$$\begin{aligned} n((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) &= n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C) \\ &\quad -n((A\cap B)\cap(A\cap C))-n((A\cap B)\cap(B\cap C))-n((A\cap C)\cap(B\cap C)) \\ &\quad +n((A\cap B)\cap(A\cap C)\cap(B\cap C)) \end{aligned}$$
.... [5점]

여기서, $A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap(A\cap C)=(A\cap B)\cap(B\cap C)=(A\cap C)\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)\cap(B\cap C)$이므로,

$$n((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))=n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)-2n(A\cap B\cap C)$$

따라서, $n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)=23+10=33$. 그러므로,

$$n(A\cup B\cup C)=19+18+21-33+5=30$$

이므로 집합 U의 원소의 개수는 30이다. ....[10점]

1−2. $2n(A\cap B)=n(A\cap C)+n(B\cap C)$라 할 때, $n(A\cup B)$의 값을 구하시오. [10점]

[풀이]

제시문 <다>의 (i)에 의해, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이다.

한편 $2n(A\cap B)=n(A\cap C)+n(B\cap C)$이므로,

$$n(A\cap B)=(n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C))/3$$이다. .... [5점]

문제 1의 풀이에서 $n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)=33$이므로 $n(A\cap B)=11$이다.

따라서, $n(A\cup B)=19+18-11=26$ 이다. ....[10점]

1-3. $n(A\cap B)+1 = n(A\cap C)$, $n(A\cap B)-1 = n(B\cap C)$라 할 때, $n(A\cap(B\cup C)^c)$의 값을 구하시오.
(단, X^c는 집합 X의 여집합을 나타낸다.) [10점]

[풀이]

$A\cap(B\cup C)^c = A\cap((A\cap B)\cup(A\cap C))^c$ 이고 $(A\cap B)$, $(A\cap C)\subset A$ 이므로

$$n(A\cap(B\cup C)^c) = n(A)-n((A\cap B)\cup(A\cap C))$$이다.

따라서 제시문 <다>의 (i)에 의해

$$n(A\cap(B\cup C)^c) = n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$이다. .... [5점]

한편, $n(A\cap B)+1 = n(A\cap C)$, $n(A\cap B)-1 = n(B\cap C)$이므로

$$2\times n(A\cap B) = n(A\cap C) + n(B\cap C)$$이다.

따라서 문제 2의 풀이에 의해 $n(A\cap B)=11$이고 $n(A\cap C)=12$, $n(B\cap C)=10$이다. 그러므로

$$n(A\cap(B\cup C)^c) = n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)=19-11-12+5=1$$이다. .... [10점]

[문제 2] 다음 제시문 <가>, <나>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 좌표평면 위의 직선 $l : ax+by+c=0$에 수직인 법선벡터는 $\vec{n}=(a,b)$이다.

<나> 좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$과 직선 $l : ax+by+c=0$ $(a^2+b^2=1)$에 대하여 $d_{l,\mathrm{P}}=ax_1+by_1+c$라 하자

2-1. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(2,1)$, $\mathrm{Q}(-2,3)$이 직선 l 대하여 대칭일 때, 직선 l의 방정식을 구하시오. [10점]

[풀이]

두 점이 직선 l에 대하여 대칭이므로, 직선 l은 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 수직이고, 두 점 P, Q의 중점 M을 포함한다.

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-4,2)$이고, 점 M의 좌표는 $\mathrm{M}(0,2)$이므로, 직선 l의 방정식은

$$(-4)(x-0)+2(y-2)=0 \text{ 또는 } 2x-y+2=0$$ .... [10점]

이다.

2-2. 제시문 <가>를 이용하여, 좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$과 직선 $l : ax+by+c=0$ $(a^2+b^2=1)$ 사이의 거리가 $|d_{l,\mathrm{P}}|$임을 보이시오. [15점]

[풀이]

점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_0,y_0)$라고 하면, $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$는 직선 l의 법선벡터는 $\vec{n}=(a,b)$에 평행하므로

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=t\vec{n} \text{ 또는 } (x_1-x_0,y_1-y_0)=t(a,b)$$ .... [5점]

인 실수 t가 존재한다. 따라서

$$x_0=x_1-ta, \quad y_0=y_1-tb$$

한편 점 $\mathrm{H}(x_0,y_0)$는 직선 l의 점이므로

$$a(x_1-ta)+b(y_1-tb)+c=0 \text{ 이고 } t=\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$$ .... [10점]

또한 $|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=|t||\vec{n}|$ 이므로 $a^2+b^2=1$에 대하여, 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$과 직선 l 사이의 거리는

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=|t|=|ax_1+by_1+c|$$ .... [15점]

2-3. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{P}(3,2)$, $\mathrm{Q}(-2,1)$, $\mathrm{R}(0,-1)$대하여 $d_{l,\mathrm{P}}+d_{l,\mathrm{Q}}+d_{l,\mathrm{R}}=0$이 되도록 하는 직선 $l : ax+by=0$ $(a^2+b^2=1)$의 방정식을 구하시오. [10점]

[풀이]

제시문 <나>에 의하여

$$\begin{aligned} d_{l,\mathrm{P}}+d_{l,\mathrm{Q}}+d_{l,\mathrm{R}} &= (3a+2b)+(-2a+b)+(-b) \\ &= a+2b \end{aligned}$$

따라서, 조건 $d_{l,\mathrm{P}}+d_{l,\mathrm{Q}}+d_{l,\mathrm{R}}=0$으로부터 $a=-2b$이다. 한편 $a^2+b^2=1$이므로

$$a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\ b=\mp\frac{1}{\sqrt{5}}$$ .... [5점]

이고 직선의 방정식은

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y=0 \text{ 또는 } y=2x$$ .... [10점]

[문제 3] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 함수 $f(t)$가 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 $t=g(x)$가 미분 가능한 함수일 때, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$이면 $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)dx$ 이다.

<나> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고, 그의 도함수들이 연속일 때, 등식 $\int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx$ 가 성립한다.

<다> $y=f(x)$는 $x \geq 0$에서 정의되고 $f(0)=0$, $f'(x)>0$을 만족하는 함수이다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 등식 $\int_{0}^{a} g(y)dy = ag(a) - \int_{0}^{g(a)} f(x)dx$ 가 성립한다. (단, $a>0$)

3-1. 함수 $f(x)$가 $0 \leq x \leq 1$에서 연속일 때, 제시문 <가>와 $\sin(\pi - x) = \sin x$ 임 을 이용하여

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$$

가 성립함을 보이시오. [10점]

[풀이]

$x=\pi-t$ 로 놓으면 $dx=-dt$이므로

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_{\pi}^{0} (\pi-t)f(\sin(\pi-t))(-dt)$$

$$= \int_{0}^{\pi} (\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} \pi f(\sin t)dt - \int_{0}^{\pi} tf(\sin t)dt$$ .... [5점]

따라서 $2\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$이므로

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$$ .... [10점]

3-2. $y=f(x)$의 역함수를 $x=g(y)$라 할 때 $\int_{a}^{b} f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$가 성립함을 보이시오.

(단 $0 < a < b \leq 1$) [10점]

[풀이]

$\frac{dx}{dy} = g'(y)$이므로,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} yg'(y)dy$$

$$= [yg(y)]_{f(a)}^{f(b)} - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$$

$$= bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$$ .... [10점]

3-3. $F(t)=\int_0^t \ln(1+\sqrt{x})dx - at \ (t \geq 0)$라 할 때, 제시문 <다>를 이용하여 $F(t)$의 최솟값을 구하시오. [15점]

[풀이]

$y=\ln(1+\sqrt{x})$라 할 때, $1+\sqrt{x}=e^y$, $x=(e^y-1)^2$이므로, $f(x)=\ln(1+\sqrt{x})$의 역함수는

$g(x)=(e^x-1)^2$이다. .... [5점]

한편, $F(t)=\int_0^t \ln(1+\sqrt{x})dx - at$ 이므로 $F'(t)=\ln(1+\sqrt{t})-a$이고, $F''(t)>0$이다.

따라서 $t=(e^a-1)^2$일 때, 극소이면서 최소이다. .... [10점]

이때 t값은 $g(a)$와 같으므로, 제시문 <다>를 이용하면,

$$
\begin{aligned}
F(g(a)) = \int_0^{g(a)} \ln(1+\sqrt{x})dx - ag(a) &= -\int_0^a g(y)dy \\
&= -\int_0^a (e^y-1)^2 dy \\
&= -\left[\frac{e^{2y}}{2} - 2e^y + y\right]_0^a \\
&= -\frac{e^{2a}}{2} + 2e^a - a - \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

따라서 $F(t)$의 최솟값은 $-\frac{e^{2a}}{2}+2e^a-a-\frac{3}{2}$이다. .... [15점]