2014 수시 모의 출제 1차 문제 풀이

[문제 1~3] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 계단을 한 번에 두 계단 혹은 한 계단을 오를 수 있다고 하자. 10개의 계단을 연속적으로 두 계단 씩 3번 오른 후 나머지 4개의 계단을 연속적으로 한 계단 씩 4번 사용하여 오르는 방법은 다음과 같은 처음 3개의 항이 2이고 나머지 4개의 항이 1인 길이가 7인 수열과 자연스럽게 대응 할 수 있다.

$$2,2,2,1,1,1,1$$

따라서 10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오르는 방법의 수는 세 개의 2와 네 개의 1로 이루어진 길이가 7인 수열의 개수와 같다.

<나> n 개의 2와 m 개의 1로 이루어진 길이가 $n+m$인 수열의 개수는 다음과 같다.

$$_{n+m}C_n = {}_{n+m}C_m = \frac{(n+m)!}{n!\,m!}$$

<다> 모 집합 U의 원소의 개수가 n이고 U의 부분집합 A의 원소의 개수가 m일 때, A의 여집합 A^c의 원소의 개수는 $n-m$ 이다.

1. 10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 아홉 번째 계단을 밟고 오르는 경우의 수를 구하여라. [10점]

[풀이]

10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 아홉 번째 계단을 (반드시) 밟고 오르려면 처음 아홉 개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 3번 사용하여 오르고 나머지 한 계단을 한 번에 올라야 한다. ....[5점]

따라서 제시문 <가>와 <나>를 참조하면 구하는 경우의 수는 다음과 같다.

$$_6C_3 \times {}_1C_1 = \frac{6!}{3!3!} \times \frac{1!}{1!1!} = 20$$ ....[10점]

2. 10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 네 번째 계단을 밟지 <u>않고</u> 오르는 경우의 수를 구하여라. [10점]

[풀이]

10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 네 번째 계단을 (반드시) 밟지 않고 오르려면 처음 세 개의 계단을 오른 후, 한 번에 두 계단 이용하여 다섯 번째 계단에 오르고 나머지 다섯 계단을 올라야 한다. ....[3점]

이의 경우는 처음 세 개의 계단을 두 계단 씩 1번 그리고 한 계단 씩 1번 사용하여 오르고 마지막 다섯 계단을 두 계단 씩 1번 그리고 한 계단 씩 3번 사용하여 오르는 경우와 처음 세 개의 계단을 한 계단 씩 3번 사용하여 오르고 마지막 다섯 계단을 두 계단 씩 2번 그리고 한 계단 씩 1번 사용하여 오르는 경우의 합이 된다.
....[6점]

따라서 제시문 <가>와 <나>를 참조하면 구하는 경우의 수는 다음과 같다.

$$_2C_1 \times {}_4C_1 + {}_3C_3 \times {}_3C_1 = 8+3 = 11$$ ....[10점]

3. 10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 여섯 번째 계단을 (반드시) 밟고 오르는 경우의 수를 구하여라. [10점]

[풀이]

10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 여섯 번째 계단을 (반드시) 밟고 오르려면 처음 여섯 개의 계단을 오른 후 나머지 네 계단을 올라가야 한다. ....[3점]

이의 경우는 처음 여섯 개의 계단을 두 계단 씩 3번 사용하여 오른 후 나머지 네 개의 계단을 한 계단 씩 4번 사용하여 오르는 경우, 처음 여섯 개의 계단을 두 계단 씩 2번 그리고 한 계단 씩 2번 사용하여 오른 후 나머지 네 개의 계단을 두 계단 씩 1번 그리고 한 계단 씩 2번 사용하여 오르는 경우, 그리고 처음 여섯 개의 계단을 두 계단 씩 1번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오른 후 나머지 네 개의 계단을 두 계단 씩 2번 사용하여 오르는 경우의 합이 된다. ....[6점]

따라서 제시문 <가>와 <나>를 참조하면 구하는 경우의 수는 다음과 같다.

$${}_{3}C_{3} \times {}_{4}C_{4} + {}_{4}C_{2} \times {}_{3}C_{1} + {}_{5}C_{1} \times {}_{2}C_{2} = 1+18+5 = 24$$ ....[10점]

[별해]

10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 오를 때, 여섯 번째 계단을 (반드시) 밟고 오르는 경우의 수는, 대칭성에 의해 10개의 계단을 두 계단 씩 3번 그리고 한 계단 씩 4번 사용하여 내려올 때, 네 번째 계단을 (반드시) 밟고 내려는 경우의 수와 같다. ....[5점]

이는 제시문 <다>의 여집합의 성질을 이용하고 문제 2 그리고 제시문 <가>를 이용하면 구하는 경우의 수는 다음과 같다.

$${}_{7}C_{3} - 11 = \frac{7!}{4!\,3!} - 11 = 24$$ ....[10점]

[문제 4~6] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> x에 관한 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지기 위한 필요충분조건은 $f(a)=0$, $f'(a)=0$ 이다.

<나> 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 그 구간에서 항상 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 단조증가 한다.

<다> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \text{ (단, } a<c<b\text{)}$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

4. n을 자연수라고 할 때, 다항식 $f(x)=a_n x^{n+1}+b_n x^n+1$이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지도록 a_n, b_n을 구하여라. [10점]

[풀이]
$f(x)=a_n x^{n+1}+b_n x^n+1$에서 $f'(x)=(n+1)a_n x^n+nb_n x^{n-1}$이다.
$f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지기 위한 조건은 제시문 <가>에서

$$f(1)=a_n+b_n+1=0\text{이고}\quad f'(1)=(n+1)a_n+nb_n=0$$

이다. 이들을 풀면 $a_n=n$, $b_n=-n-1$ ....[10점]

5. 함수 $f(x)=(x+2)e^{-x}$의 도함수 $f'(x)$는 $x>0$에서 단조 증가하는 것을 보이고, 이를 이용하여 $0<a<b$일 때 $-(a+1)e^{-a}<\dfrac{(b+2)e^{-b}-(a+2)e^{-a}}{b-a}<-(b+1)e^{-b}$가 성립함을 증명하여라. [10점]

[풀이]
$f'(x)=-xe^{-x}-e^{-x}=-(x+1)e^{-x}$이고 $f''(x)=xe^{-x}$이다. $x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 제시문<나>에 의하여 $f'(x)$는 단조증가 한다.
--- [3점]
$f(x)$에 대해 제시문<다>에 의하여
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 $a<c<b$가 반드시 적어도 하나 존재한다.
-- [6점]
또한 $f'(x)$가 단조증가 하므로 $f'(a)<f'(c)<f'(b)$이다.
따라서 $-(a+1)e^{-a}<\dfrac{(b+2)e^{-b}-(a+2)e^{-a}}{b-a}<-(b+1)e^{-b}$ 이다.
---[10점]

6. 함수 $f(x)=\frac{3}{2}x(1-x)$라 하고 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$이고, $\frac{1}{3}< a_n < \frac{1}{2}$ $(n \geq 2)$이 만족될 때, $\frac{3a_{n+1}-1}{3a_n-1}<\frac{1}{2}$임을 보여라. [15점]

[풀이]

$\frac{1}{3}< a_n < \frac{1}{2}$, $f(x)=\frac{3}{2}x(1-x)$이므로 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$이다.

---[5점]

제시문 <다>에 의하여

$\dfrac{f(a_n)-\frac{1}{3}}{a_n-\frac{1}{3}}=f'(c)$, $\frac{1}{3}< c < a_n$을 만족하는 c가 존재한다.

---[10점]

$f'(x)=\frac{3}{2}-3x$이고 $f'(c)<f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{3a_{n+1}-1}{3a_n-1}<\frac{1}{2}$이 된다.

---[15점]

[문제 7~9] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 정사각형 행렬 D에 대하여 $DX=E$ 또는 $XD=E$를 만족하는 정사각형 행렬 X가 존재하면, X는 D의 역행렬 $D^{-1}=X$ 이다. (단, E는 D와 같은 꼴인 단위행렬이다.)

<나> 2×1행렬 $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$에 대하여 A^*를 1×2 행렬 $A^*=(a_1, a_2)$라 정의한다. $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$일 때, 행렬 곱셈의 정의에 의해 $AB^*=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2\\a_2b_1 & a_2b_2\end{pmatrix}$이고 $A^*B=a_1b_1+a_2b_2$이다.

<다> 행렬 $A=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ (단, $pq\neq0$, $p^2+q^2=1$)에 대하여, 좌표평면에서 행렬 $E+AA^*$으로 나타내어지는 일차변환을 f라 하자. 일차변환 f에 의하여 자기 자신으로 옮겨지는 좌표평면위의 직선 l이 존재한다.

7. 제시문 <나>에서 $B^*A\neq-1$일 때, 행렬 $E+AB^*$의 역행렬이 $(E+AB^*)^{-1}=E-\dfrac{AB^*}{B^*A+1}$임을 보이시오. [10점]

[풀이]

$$(E+AB^*)\left(E-\frac{AB^*}{B^*A+1}\right)=E+AB^*-\left(\frac{1}{B^*A+1}\right)AB^*-\left(\frac{1}{B^*A+1}\right)AB^*AB^*$$

$$=E+\left(1-\frac{1}{B^*A+1}\right)AB^*-\frac{B^*A}{B^*A+1}AB^*$$ ....[5점]

$$=E+\left(1-\frac{1+B^*A}{B^*A+1}\right)AB^*$$

$$=E$$ ....[10점]

따라서 제시문 <가>에 의하여 $(E+AB^*)^{-1}=E-\dfrac{AB^*}{B^*A+1}$이다.

8. 제시문 <다>에서 일차변환 f에 의하여 직선 l : $x+ky=0$이 같은 직선 l로 옮겨질 때, k의 값을 구하시오. (단, $k\neq0$) [15점]

[풀이]

일차 변환 f에 의하여 직선 l위의 점 (x,y)가 점 (x',y')으로 옮겨진다고 하면,

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=(E+AA^*)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+p^2 & pq\\pq & 1+q^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(1+p^2)x+pqy\\pqx+(1+q^2)y\end{pmatrix}$$이다.

따라서, $\begin{cases}x'=(1+p^2)x+pqy\\y'=pqx+(1+q^2)y\end{cases}$. ....[5점]

직선 l이 변환 f에 의하여 변하지 않으므로, $x'+ky'=0$이고,

$$((1+p^2)x+pqy)+k(pqx+(1+q^2)y)=0 \text{ 또는 } ((1+p^2)+kpq)x+(k(1+q^2)+pq)y=0.$$

위 직선이 직선 l과 일치하려면

$$(1+p^2)+kpq=\frac{k(1+q^2)+pq}{k}$$ ....[10점]

를 만족해야한다. 위 식을 정리하면

$$pqk^2+(p^2-q^2)k-pq=0$$

을 얻을 수 있다. 따라서

$$k=\frac{-(p^2-q^2)\pm\sqrt{(p^2-q^2)^2+4p^2q^2}}{2pq} \text{ 또는 } k=\frac{q}{p},\ -\frac{p}{q}$$ ....[15점]

9. 제시문 <다>의 일차변환 f과 행렬 $C=\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$으로 나타내어지는 일차변환 g에 대하여, 합성변환 $g\circ f$가 원 $x^2+y^2=1$을 도형 G로 옮길 때, G의 방정식을 구하시오. [10점]

[풀이]

합성변환 $g\circ f$에 의하여 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 (x, y)가 점 (x', y')으로 옮겨진다고 하면,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C(E+AA^*)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$A^*A=p^2+q^2=1$이므로 C의 역행렬이 존재하고, 문제 1에 의하여

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (E+AA^*)^{-1}C^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(E-\frac{1}{2}AA^*\right)C^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+q^2 & -pq \\ -pq & 1+p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p & -2q \\ q & 2p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

따라서 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(px'-2qy') \\ y = \dfrac{1}{2}(qx'+2py') \end{cases}$ ....[5점]

이것을 $x^2+y^2=1$에 대입시켜 정리하면

$$\frac{1}{4}(p^2+q^2)(x')^2+(p^2+q^2)(y')^2=1 \text{ 또는 } \frac{(x')^2}{2^2}+(y')^2=1$$ ....[10점]